NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H.-G. ZEUTHEN

Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 433-443

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__433_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(voir page 385);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

IX. — *Cas particuliers de la détermination des caractéristiques des systèmes de coniques qui ont un contact du second ordre et deux du premier ordre avec des courbes données.*

40. Nous nous contenterons de considérer les cas où deux des courbes données se touchent.

Supposons premièrement que les courbes C_{m_1, n_1} et C_{m_2, n_2} dont les contacts avec les coniques du système sont du premier ordre, se touchent en un point θ. Alors selon le n° 23, le système $[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2}]$ se divise en deux: $[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}\theta]$, $[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1} - C_{m_2 n_2}]$, et une caractéristique du système général comprend *deux fois* la caractéristique homologue du premier système partiel et *une fois* celle du second. On sait encore selon le n° 24 que, pour toute espèce de coniques infiniment aplaties du système général limitées à un point d'intersection de C_{m_1,n_1} avec C_{m_2,n_2}, le premier système partiel en contient une qui comprend les coniques passant par le point de contact θ et du reste déterminées de la même manière qu'au grand système, et que celle-ci a, dans le nombre λ du système partiel, le même coefficient que l'espèce homologue dans le λ du système général. Comme le système général ne contient aucune conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente commune à

C_{m_1, n_1} et C_{m_2, n_2}, les systèmes partiels n'en contiendront plus dans la tangente de contact au point θ (*voir* le n° 24). Toutes les coniques infiniment aplaties du système $[(C_{m,m})^2, C_{m_1, n_1}\theta)$ correspondent donc à la première et à la cinquième espèce nommées au n° 29, et les théorèmes du n° 34 donnent lieu aux suivants :

Pour un système de coniques qui ont un contact du second ordre avec une courbe donnée $C_{m,n}$ *et un contact du premier ordre en un point donné* θ *avec une autre courbe donnée* C_{m_1, n_1}, *il faut compter dans le nombre* λ :

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie limitée à* θ, *tangente à* $C_{m,n}$ *et limitée au point de contact;*

Une fois, *toute conique infiniment aplatie limitée à* θ *et à un point de rebroussement de* $C_{m,n}$.

Par des procédés analogues, ou au moyen du principe de dualité on voit que :

Pour le même système, il faut compter dans le nombre ϖ :

Trois fois, *toute conique à point double composée de la tangente à* C_{m_1, n_1} *au point* θ *et de la droite qui touche* $C_{m,n}$ *en l'un des points où elle rencontre la première droite;*

Une fois, *toute conique à point double composée de la tangente à* C_{m_1, n_1} *au point* θ *et d'une tangente d'inflexion à* $C_{m,n}$.

41. On aura (selon le n° 40) pour le système $[(C_{m,n})^2, C_{m_1, n_1}\theta]$,

$$\lambda = 3.n + 1.d',$$

$$\varpi = 3.m + 1.t'.$$

d'où

$$(15a) \qquad \mu = \nu = 3n + d' = 3m + t'.$$

Alors

$$(15b)\qquad [(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}\theta] \equiv (\mu, \nu).$$

Si $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on trouve

$$(15c)\qquad \mu = \nu = 3m(m-1).$$

42. Les théorèmes du n° 40 sont encore vrais dans le cas où les courbes $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} coïncident et pour un système de coniques qui ont avec une même courbe deux contacts, l'un du second ordre en un point non donné, l'autre du premier ordre en un point donné. Ce système sera représenté par $[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta]$. On trouve pour ce système :

$$\lambda = 3.(n-2) + 1.d',$$
$$\varpi = 3.(m-2) + 1.t',$$

d'où

$$(16a)\qquad \mu = \nu = 3(n-2) + d' = 3(m-2) + t'.$$

Alors

$$(16b)\qquad [(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}\theta) \equiv (\mu, \nu).$$

Si $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on trouve

$$(16c)\qquad \mu = \nu = 3(m-2)(m+1).$$

Pour $m = 2$ on trouve $\mu = \nu = 0$.
Pour $m = 3$ on trouve $\mu = \nu = 12$.

43. Nous aurons encore à traiter les cas où une courbe avec laquelle les coniques d'un système ont un contact du second ordre, en touche une autre avec laquelle elles ont un contact du premier ordre. Alors la formule (I) du n° 23 sera remplacée par la suivante :

$$(\text{I})\qquad \left\{\begin{aligned} N[(C_{m,n})^2, C_{m',n'}, Z_1, Z_2] = {} & 3N[(C_{m,n})^2\theta, Z_1, Z_2] \\ & + N[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, Z_1, Z_2], \end{aligned}\right.$$

où $(C_{m,n})^2\theta$ exprime la condition d'un contact du second ordre en un point donné, et $(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}$ celles d'avoir avec $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui se touchent elles-mêmes des contacts séparés respectivement du second et du premier ordre.

On aura en particulier, si $C_{m',n'}$ se réduit à un point,

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} N[(C_{m,n})^2, p, Z_1, Z_2] = 3.N[(C_{m,n})^2\theta, Z_1, Z_2] \\ + N[(C_{m,n})^2 - p, Z_1, Z_2], \end{aligned}\right.$$

où $(C_{m,n})^2 - p$ représente les conditions d'avoir avec $C_{m,n}$ un contact du second ordre en un point non donné, et de la couper en un point donné. Si $C_{m',n'}$ se réduit à une droite, la formule (I) sera remplacée par la suivante :

$$(\mathrm{III})\quad \left\{\begin{aligned} N[(C_{m,n})^2, l, Z_1, Z_2] = 3N[(C_{m,n})^2\theta, Z_1, Z_2) \\ + N[(C_{m,n})^2 - l, Z_1, Z_2). \end{aligned}\right.$$

Au moyen de la formule (I), où l'on peut remplacer la condition Z_2 successivement par celles de passer par un point et de toucher une droite, on voit qu'*un système* $[(C_{m,n})^2, C_{m',n'}, Z]$, *dans le cas où* $C_{m,n}$ *et* $C_{m',n'}$ *se touchent elles-mêmes, se divise en deux systèmes partiels* $[(C_{m,n})^2\theta, Z]$ *et* $[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, Z]$, *et que chacune des caractéristiques du système général comprend trois fois la caractéristique homologue du premier système partiel et une seule fois celle du second système.*

44. Pour trouver les coniques singulières d'un système $[(C_{m,n})^2\theta, Z]$, il faut regarder celle du système $[(C_{m,n})^2, C_{m',n'}, Z]$ et examiner ce qu'elles deviennent dans le cas où deux points d'intersection p_1 et p_2 de $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ coïncident avec un point de contact θ. Au système $[(C_{m,n})^2\theta, Z]$ pourront appartenir, après cette coïncidence de p_1 et p_2, des coniques infiniment aplaties :

1° Tangentes à $C_{m,n}$ en l'un des points p_1 ou p_2 et limitées au même point;

2° Renfermées dans une des deux tangentes communes à $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$, qui coïncident en même temps que p_1 et p_2 et limitées au point de contact avec $C_{m,n}$.

Ces deux espèces de coniques singulières seront, après la coïncidence de p_1 et p_2, renfermées dans la tangente à $C_{m,n}$ au point θ et limitées à ce point. Mais elles n'appartiendront pas toutes au premier système partiel, parce qu'une conique infiniment aplatie, déterminée de la manière indiquée, est aussi une limite des coniques du système $[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, Z)$. (*Voir* le n° 24.)

Si la condition Z consiste dans un contact avec une courbe donnée C_{m_1,n_1}, les coniques aplaties dont il s'agit seront assujetties, à côté des conditions nommées, de toucher $C_{m,n}$ au point θ et d'y être limitées, à celle d'être limitées par C_{m_1,n_1}. Les coniques infiniment aplaties du système $[(C_{m,n})^2, C_{m',n'}, C_{m_1,n_1}]$, qui coïncident dans chacune, comptent pour 18 dans le nombre λ de ce système (selon la deuxième et la troisième proposition du n° 34). Si nous supposons que la même conique singulière compte pour x dans le λ du système $[(C_{m,n})^2\theta, C_{m_1,n_1}]$ et pour y dans celui du système $[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, C_{m_1,n_1}]$, nous aurons, selon les nos 43 et 22,

$$18 = 3x + y,$$

d'où $x < 6$, puisque y est positif.

Les coniques à point double donnent lieu à des considérations semblables; mais pour elles nous renvoyons au principe de dualité.

45. Le système $[(C_{m,n})^2\theta, C_{m_1,n}]$ ne contient de coniques infiniment aplaties que celles qui sont nommées au n° 44. Donc

$$\lambda = x \cdot m_1, \quad \varpi = x \cdot n_1,$$

d'où

$$\mu = \frac{1}{3} x (2m_1 + n_1);$$

μ devant être entier et x positif et plus petit que 6, on doit avoir $x = 3$.

On trouve maintenant

$$(17a) \qquad \begin{cases} \mu = 2m_1 + n_1, \\ \nu = 2n_1 + m_1, \end{cases}$$

$$(17b) \qquad [(C_{m,n})^2\theta, C_{m_1,n_1}] \equiv (\mu, \nu).$$

46. x ayant la valeur 3, on a les théorèmes suivants :

Pour un système de coniques ayant un contact du second ordre en un point donné θ *avec une courbe* $C_{m,n}$, *et un contact du premier ordre en un point non déterminé avec une courbe* C_{m_1,n_1}, *on doit compter :*

Dans le nombre λ, trois fois *toute conique infiniment aplatie, tangente à* $C_{m,n}$ *au point* θ, *limitée à ce point et à* C_{m_1,n_1};

Et dans le nombre ϖ, trois fois *toute conique ayant* θ *pour point double, composée de la tangente à* $C_{m,n}$ *en ce point et d'une tangente à* C_{m_1,n_1}.

Ces théorèmes sont encore vrais lorsque $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} coïncident.

47. Le système $[(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}]$ dont les coniques ont deux contacts avec $C_{m,n}$, l'un du second ordre en un point donné, l'autre du premier ordre en un point non déterminé, ne contient pas d'autres coniques singulières que celles que nous venons d'indiquer au n° 46. Donc

$$\lambda = 3(m-2), \quad \varpi \quad 3(n-2),$$

d'où

$$(18a) \qquad \begin{cases} \mu = 2m + n - 6, \\ \nu = m + 2n - 6, \end{cases}$$

$$(18b) \qquad [(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}] \equiv (\mu, \nu),$$

et pour une courbe générale de l'ordre m,

$$(18c)\qquad \begin{cases} \mu = (m-2)(m+3), \\ \nu = (m-2)(2m+3). \end{cases}$$

Pour $m = 2$, on trouve $\mu = \nu = 0$,
Pour $m = 3$, on trouve $\mu = 6$, $\nu = 9$.

48. Les caractéristiques des systèmes

$$[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1} - C_{m_2,n_2}] \quad \text{et} \quad [(C_{m,n})^2 - C_{m',n'}, C_{m_1,n_1}]$$

(*voir* les n^os^ 40 et 43) se trouvent maintenant au moyen des équations (I) des n^os^ 23 et 43.

Pour trouver les caractéristiques du système

$$[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'} - C_{m,n}],$$

dont les coniques ont avec $C_{m,n}$ un contact du second et un contact du premier ordre, et avec $C_{m',n'}$, qui touche $C_{m,n}$, un contact du premier ordre séparé des deux premiers contacts, on fait usage de l'équation suivante :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, C_{m',n'}, Z] = 2N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta, Z] \\ \qquad + 3N[(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}, Z] \\ \qquad + N[(C_{m,n})^2 - C_{m',n'} - C_{m,n}, Z]. \end{cases}$$

On trouve, en particulier,

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, p, Z] = 2N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta, Z] \\ \qquad + 3N[(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}, Z] \\ \qquad + N[(C_{m,n})^2 - p - C_{m,n}, Z], \end{cases}$$

où $(C_{m,n})^2 - p - C_{m,n}$ exprime les conditions de deux contacts du second et du premier ordre en des points non donnés, et d'une intersection en un point donné, avec une même courbe $C_{m,n}$, et

$$\begin{aligned} N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\, l, Z] = {} & 2N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta, Z] \\ & + 3N[(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}, Z] \\ & + N[(C_{m,n})^2 - l - C_{m,n}, Z]. \end{aligned}$$

X. *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont des contacts du second ordre avec deux courbes données.*

49. Soient $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} les courbes données; alors le système sera désigné par $[(C_{m,n})^2, (C_{m_1,n_1})^2]$.

Il contient toute conique infiniment aplatie :

1° Renfermée dans une tangente commune aux deux courbes et limitée aux points de contact;

2° Passant par un point de rebroussement de l'une des courbes données, tangente à l'autre et limitée aux points de rebroussement et de contact;

3° Passant par et limitée à un point de rebroussement de chacune des deux courbes.

Désignons par x, y et z les coefficients relatifs à ces trois classes dans l'expression de λ; alors

$$\lambda = xnn_1 + y(d'n_1 + d'_1 n) + zd'd'_1,$$

et selon le principe de dualité

$$\varpi = xmm_1 + y(t'm_1 + t'_1 m) + zt't'_1,$$

d'où résulte

$$\mu = \frac{1}{3}[x(mm_1 + 2nn_1) + y(t'm_1 + t'_1 m + 2d'n_1 + 2d'_1 n) + z(t't'_1 + 2d'd'_1)],$$

$$\nu = \frac{1}{3}[x(2mm_1 + nn_1) + y(2t'm_1 + 2t'_1 m + d'n_1 + d'_1 n) + z(2t't'_1 + d'd'_1)].$$

50. Pour déterminer les valeurs des coefficients nous essayerons de trouver par d'autres moyens la valeur de μ dans le cas où $C_{m,n}$ est remplacée par la courbe M de l'ordre m et douée d'un point multiple de l'ordre $m - 1$ (*voir* le n° 30). Il nous faudra appliquer le lemme du

n° 31 au système $[M, (C_{m_1,n_1})^2, p)$ auquel correspondront (les notations du n° 31 étant conservées) les valeurs suivantes :

$$r = 1, \quad q = 2m - 2,$$
$$\alpha = N[(M\theta, (C_{m_1,n_1})^2, p]$$
$$\beta = N[M - p_1, (C_{m_1,n_1})^2, p],$$

ou, d'après l'équation (II) du n° 23,

$$\beta = N[M, (C_{m_1,n_1})^2, p, p_1)] - 2N[M\theta, (C_{m_1,n_1})^2, p],$$

d'où

$$q\alpha + \beta = 2(m-2)N[M\theta, (C_{m_1,n_1})^2, p] + N[M, (C_{m_1,n_1})^2, p, p_1].$$

Or, selon les formules (15) et (11), qui sont encore vraies pour la courbe particulière M (*),

$$N[M\theta, (C_{m_1,n_1})^2, p] = 3m_1 + t'_1,$$
$$N[M, (C_{m_1,n_1})^2, p, p_1) = (3m_1 + t'_1)(2m + n),$$

et, selon le n° 30, $n = 2(m-1)$; par conséquent

$$q\alpha + \beta = 6(m-1)(3m_1 + t'_1).$$

Comme aucune des $q\alpha + \beta$ coniques dont un point d'intersection avec M coïncide avec un point de contact n'est infiniment aplatie, elles auront toutes un contact du second ordre avec cette courbe. Donc

$$q\alpha + \beta = N[(M)^2, (C_{m_1,n_1})^2, p],$$

et nous aurons une expression de cette quantité en substituant dans celle que nous avons trouvée pour μ, dans le numéro précédent, les valeurs de n, d' et t' qui correspondent à la courbe M :

$$n = 2(m-1), \quad d' = 0, \quad t' = 3(m-2).$$

(*) *Voir* la note du n° 32.

On trouve alors

$$q\alpha + \beta = \frac{1}{3}\left\{[(x+15y)m - 18y]m_1 + 4(x-3y)(m-1)n_1 \right.$$
$$\left. + [(5y+3z)m - 6y - 6z]t'_1\right\}.$$

Les deux expressions de $q\alpha + \beta$ doivent être égales, et comme les nombres m, m_1, n_1 et t'_1 peuvent prendre, indépendamment les uns des autres, une infinité de valeurs, elles doivent être identiques, ce qui donne

$$x = 9, \quad y = 3, \quad z = 1.$$

51. En substituant dans les expressions trouvées pour μ et ν dans le n° 49 ces valeurs de x, y et z et réduisant au moyen des formules de M. Plücker, on trouve

$$(19a) \quad \mu = \nu = (3m + t')(3m_1 + t'_1) = (3n + d')(3n_1 + d'_1);$$
$$(19b) \qquad [(C_{m,n})^2, (C_{m_1,n_1})^2] \equiv (\mu, \nu),$$

et quand $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} sont les courbes les plus générales de leur degré,

$$(19c) \qquad \mu = \nu = 9m(m-1)m_1(m_1-1).$$

52. Les coefficients x, y et z qui entrent et dans λ et dans ϖ étant trouvés, nous aurons les propositions suivantes :

Pour un système de coniques qui ont des contacts du second ordre avec deux courbes données, il faut compter,

Dans le nombre λ :

Neuf fois, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente commune aux deux courbes et limitée aux points de contact;*

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie passant par un point de rebroussement de l'une des deux courbes, tangente à l'autre et limitée aux points de rebroussement et de contact;*

Une fois, *toute conique infiniment aplatie limitee à un point de rebroussement de chacune des deux courbes,*

Et dans le nombre ϖ ·

Neuf fois, *toute conique ayant pour point double un point d'intersection des deux courbes et composée des deux tangentes en ce point;*

Trois fois, *toute conique à point double composee d'une tangente d'inflexion de l'une des courbes et de la tangente à l'autre en l'un des points où elle rencontre la première droite;*

Une fois, *toute conique a point double composee d'une tangente d'inflexion de chacune des deux courbes* (*)

(*) La comparaison de ces theoremes avec ceux du n° 34, confirme, comme dans tous les cas que j'ai traites, la regle suivante, qui par ellememe est tres-probable.

Lorsque une conique infiniment aplatie, passant par et limitee a un point d'intersection de C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2}, et satisfaisant a une autre couple de conditions que nous designerons par X, compte pour x dans le λ du systeme $(Z_1, Z_2, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$, et qu'une conique infiniment aplatie, qui aussi passe par, et est limitee a un point d'intersection de C_{m_1,n_1} avec C_{m_2,n_2}, et qui satisfait a une couple de conditions Y, compte pour y dans le λ du systeme $(Z_3, Z_4, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$, la conique infiniment aplatie, determinee par les conditions X et Y, compte pour xy dans le λ du systeme (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)

Ayant prouve aussi pour les cas ou les conditions Z_1 et Z_2 (ainsi que Z_3 et Z_4), ne sont pas independantes l'une de l'autre, la verite de cette regle, que je n ai pas ose accepter *a priori*, on pourrait se passer de tout ce paragraphe-ci, les theoremes du n° 52 resultant alors du n° 34 On en pourrait aussi faire usage ailleurs . elle donnerait, par exemple, dans le n° 29 les equations suivantes entre les coefficients

$$z = 2x, \quad s = 2v$$

On ne pourrait pourtant se passer des recherches du n° 32

Du reste, nous n'avons pas donne a l'enonce de notre regle toute la generalite probable, mais on en saura mieux fixer l extension en meme temps qu on la *prouvera*

La suite prochainement.