Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 420-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__420_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 752;

PAR M. L. BINY,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Toulouse
(classe de M. Forestier).

On circonscrit à un triangle quelconque une courbe du second degré, telle que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point; on demande de prouver que le lieu de ce point est une courbe *à centre du troisième ordre. Déterminer cette courbe. Lieu du pied de la quatrième normale.*

I. Soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

les équations des trois côtés BC, AC, AB du triangle; l'équation générale des coniques circonscrites à ce triangle sera

$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = 0,$$

et les tangentes aux trois sommets A, B, C auront, respectivement, pour équations

$$\frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} = 0, \quad \frac{\alpha}{l} + \frac{\gamma}{n} = 0, \quad \frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} = 0.$$

Les normales, ou les perpendiculaires aux tangentes, seront représentées par

$$\frac{\beta}{n - m\cos A} = \frac{\gamma}{m - n\cos A},$$

$$\frac{\alpha}{n - l\cos B} = \frac{\gamma}{l - n\cos B},$$

$$\frac{\beta}{l - m\cos C} = \frac{\alpha}{m - l\cos C}.$$

En éliminant l, m, n entre ces dernières équations, nous aurons l'équation du lieu géométrique cherché. L'élimination donne

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \gamma\cos B)(\beta + \alpha\cos C)(\gamma + \beta\cos A) \\ = (\alpha + \beta\cos C)(\gamma + \alpha\cos B)(\beta + \gamma\cos A). \end{array} \right.$$

On voit que ce lieu est une ligne du troisième ordre.

Pour démontrer que cette ligne a un centre, je poserai le théorème suivant :

Si m droites, au moins, passant toutes par un même point, coupent une courbe du $m^{ième}$ degré, chacune en m points, réels ou imaginaires, deux à deux symétriques par rapport au point de rencontre des droites, ce point de rencontre sera le centre de la courbe.

En effet, prenons pour origine le point de rencontre des m droites. Soit $y = kx$, l'équation de l'une quelconque de ces droites; les abscisses des points où elle coupe la courbe du m^e degré, seront déterminées par une équation de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots = 0,$$

et qui ne doit contenir que des termes de même parité que m.

Le coefficient B de x^{m-1} est une fonction algébrique de k, au plus du degré $m - 1$. Cette fonction doit être annulée par m valeurs différentes de k; donc, les coefficients des puissances de k qui la composent, sont identiquement nuls. Il en est de même des termes en x^{m-3}, $x^{m-5}, \ldots$ Donc, l'équation de la courbe ne contient que des termes de même parité que m, en x et y. Par conséquent, l'origine des coordonnées est le centre de la courbe.

C. Q. F. D.

Cela posé, je dis que le lieu dont nous avons trouvé l'équation a pour centre le centre du cercle circonscrit au triangle donné.

Les équations des droites menées des sommets A, B, C au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, sont

$$\gamma \cos B = \beta \cos C, \quad \beta \cos A = \alpha \cos B, \quad \alpha \cos C = \gamma \cos A;$$

les coordonnées du point commun à ces trois droites vérifient l'équation du lieu; donc la ligne du 3^e ordre que cette équation représente, passe par le centre O du cercle circonscrit au triangle.

Cette courbe passe par les trois sommets A, B, C du triangle ABC, et par les points A′, B′, C′, diamétralement opposés à A, B, C, sur la circonférence circonscrite au triangle.

Il est évident que les coordonnées des sommets A, B, C satisfont à l'équation (1).

Le point A′ est à l'intersection des droites BA′, CA′, perpendiculaires à BA, CA, et qui ont pour équations

$$\alpha + \gamma \cos B = 0, \quad \alpha + \beta \cos C = 0.$$

Or, $\alpha + \gamma \cos B$ est facteur du premier membre de l'équation (1), et $\alpha + \beta \cos C$ est facteur du second membre; donc les coordonnées de A′ vérifient l'équation (1). On prouve de même que B′ et C′ sont des points du lieu.

Ainsi, chacune des trois droites AOA′, BOB′, COC′ coupe la courbe en deux points symétriques par rapport au point O; il résulte du théorème que nous avons précédemment démontré, que le point O est le centre de cette courbe.

En modifiant la forme de l'équation (1), on trouve d'autres points qui appartiennent encore à la courbe, et dont l'existence pouvait être prévue. En développant cette équation on a

$$\begin{aligned}\beta(\alpha^2 - \gamma^2)(\cos A \cos C - \cos B) + \alpha(\gamma^2 - \beta^2)(\cos B \cos C - \cos A)\\ + \gamma(\beta^2 - \alpha^2)(\cos A \cos B - \cos C) = 0.\end{aligned}$$

Sous cette forme l'équation montre que la courbe passe par les points de rencontre des bissectrices extérieures et intérieures au triangle donné (*).

(*) Le lieu cherché est celui d'un point P tel que les perpendiculaires menées aux droites PA, PB, PC par les sommets A, B, C du triangle rencontrent les côtés opposés BC, AC, AB en trois points en ligne droite. Cette définition de la ligne que l'on cherche donne, sans aucun calcul, La courbe a des branches infinies; car, si l'on mène par le sommet A une parallèle AM au côté BC, le système de ces deux parallèles AM, BC peut être considéré comme une ligne du second ordre passant par les sommets A, B, C, et les normales en ces points A, B, C se coupent à l'infini. Il en est de même pour les deux autres côtés du triangle.

Nous avons remarqué que les facteurs du premier degré, dont les produits composent les deux membres de l'équation (1) du lieu, donnent, égalés à zéro, les équations des perpendiculaires élevées sur les trois côtés du triangle, en ses trois sommets. Ces six droites forment un hexagone inscrit dans le cercle circonscrit au triangle, et dont les côtés opposés sont égaux et parallèles. On voit, du reste, que l'équation du lieu s'obtient en égalant le produit des premiers membres des équations de trois des côtés non consécutifs de cet hexagone, au produit des premiers membres des équations des trois autres côtés. Ce qu'on peut écrire ainsi

$$\text{(2)} \qquad AC'.BA'.CB' = AB'.CA'.BC'.$$

Prenons pour origine de coordonnées rectangulaires le centre O du cercle circonscrit; pour axe des abscisses une parallèle au côté BC, l'axe des y sera la perpendiculaire abaissée du centre sur ce côté, en nommant r le rayon du cercle circonscrit au triangle, les droites AC', BA', CB',

---

douze points qui appartiennent à cette ligne : ce sont les trois sommets du triangle, le centre de la circonférence circonscrite, les points de cette circonférence diamétralement opposés aux sommets, le point de concours des trois hauteurs et les centres des quatre circonférences tangentes aux trois côtés du triangle. Il suffit de connaître neuf points d'une ligne du troisième ordre pour qu'elle soit déterminée.

Au moyen de la même définition, on trouve en coordonnées *cartésiennes*, et par un calcul assez simple, l'équation du lieu cherché. G.

AB′, CA′, BC′ seront représentées par les équations

$$x\cos C - y\sin C + r\sin B = 0,\quad x\cos B + y\sin B + r\sin C = 0,$$
$$x - r\sin A = 0;$$
$$x\cos B + y\sin B - r\sin C = 0,\quad x\cos C - y\sin C - r\sin B = 0,$$
$$x + r\sin A = 0.$$

Substituant dans l'équation (1), on a l'équation du lieu en coordonnées x, y. En appliquant à cette dernière équation les règles qui donnent les asymptotes, on trouve que la courbe a pour asymptotes les trois perpendiculaires abaissées du centre sur les côtés du triangle; la forme de la courbe est alors facile à déterminer.

Lorsque les angles B, C sont égaux entre eux, l'équation du lieu se décompose en $x = 0$ et en l'équation d'une hyperbole.

II. *Lieu du pied de la quatrième normale.*

On sait que par les pieds des quatre normales menées d'un point à une conique, on peut faire passer une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique. Cela posé, il est évident que l'équation du lieu s'obtiendra, en éliminant l, m, n, entre l'équation d'une conique circonscrite au triangle proposé, l'équation de l'hyperbole équilatère dont nous venons de parler, et la relation qui existe entre l, m, n, pour que les normales en A, B, C à la conique se coupent au même point (*).

On peut encore obtenir l'équation du lieu en s'appuyant sur ce théorème connu :

Dans une conique à centre les pieds des trois nor-

(*) La relation qui existe entre l, m, n lorsque l'equation

(1) $$l\beta\gamma + m\alpha\gamma + n\alpha\beta = 0,$$

représente une conique dont les normales en A, B, C se coupent au même *males issues d'un même point et le symétrique du pied de la quatrième normale, par rapport au centre de la conique, sont sur une même circonférence.*

Note. — MM. Carlos Watteau, élève de M. Painvin, et M. David ont donne de cette question des solutions peu différentes de celle qui precède.

Question 754;

PAR M. VICTOR STREXALOFF,
Élève de l'Université de Saint-Pétersbourg.

Soient α, β, γ *les milieux des côtés* BC, AC, AB *d'un triangle;* P *le point de rencontre des hauteurs* AD, BE,

---

point est

$$\frac{l}{\sin A}(m^2-n^2)+\frac{m}{\sin B}(n^2-l^2)+\frac{n}{\sin C}(l^2-m^2)=0. \tag{2}$$

Quand l'equation (1) represente une hyperbole équilatère, on a

$$l\cos A+m\cos B+n\cos C=0. \tag{3}$$

Les equations (1) et (3) donnent

$$l=\alpha(\gamma\cos C-\beta\cos B),\quad m=\beta(\alpha\cos A-\gamma\cos C),\quad n=\gamma(\beta\cos B-\alpha\cos A).$$

On peut remarquer que

$$\gamma\cos C-\beta\cos B=0,\quad \alpha\cos A-\gamma\cos C=0,\quad \beta\cos B-\alpha\cos A=0$$

sont les équations des perpendiculaires abaissées des trois sommets A, B, C sur les côtés opposes.

En désignant donc par

$$\alpha'=0,\quad \beta'=0,\quad \gamma'=0,$$

les équations des hauteurs du triangle donné, il vient

$$l=\alpha\alpha',\quad m=\beta\beta',\quad n=\gamma\gamma'.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer l, m, n par ces expressions dans l'equation (2), il en résulte

$$\frac{\alpha\alpha'}{\sin A}[(\beta\beta')^2-(\gamma\gamma')^2]+\frac{\beta\beta'}{\sin B}[(\gamma\gamma')^2-(\alpha\alpha')^2]+\frac{\gamma\gamma'}{\sin C}[(\alpha\alpha')^2-(\beta\beta')^2]=0.$$

G.

CF; O *le centre du cercle circonscrit au triangle dont le rayon est* R.

Sur les segments PA, PB, PC, Pα, Pβ, Pγ, *on prend les points* p, q, r, p', q', r', *de telle sorte que*

$$Pp = \frac{1}{n}PA, \quad Pq = \frac{1}{n}PB, \quad Pr = \frac{1}{n}PC;$$

$$Pp' = \frac{2}{n}P\alpha, \quad Pq' = \frac{2}{n}P\beta, \quad Pr' = \frac{2}{n}P\gamma;$$

et enfin, on désigne par p'', q'', r'' *les pieds des perpendiculaires abaissées des points* p', q', r' *sur les hauteurs* AD, BE, CF *respectivement.*

Démontrer que p, q, r, p', q', r', p'', q'', r'' *sont neuf points d'une même circonférence, dont le rayon est égal à* $\frac{1}{n}$R, *et dont le centre est un point* M *situé sur la ligne* PO, *de telle sorte que* PM $= \frac{1}{n}$ PO (*).

D'abord, je démontre que les trois points p, q, r se trouvent sur la circonférence décrite du point M comme centre avec un rayon égal à $\frac{1}{n}$R.

Je mène les droites OA, OB, OC. Puisque

$$\frac{PO}{PM} = \frac{PA}{Pp} = \frac{PB}{Pq} = \frac{PC}{Pr} = n,$$

il est clair que les droites Mp, Mq, Mr sont respectivement parallèles aux rayons OA, OB, OC; et, par conséquent, on a

$$\frac{PO}{PM} = \frac{OA}{Mp} = \frac{OB}{Mq} = \frac{OC}{Mr} = n;$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où l'on déduit

$$Mp = Mq = Mr = \frac{1}{n} R.$$

Donc, les points p, q, r sont sur la circonférence dont le centre est le point M, et dont le rayon est égal à $\frac{1}{n} R$.

Maintenant il me reste à démontrer que tous les autres points p', q', r', p'', q'', r'' sont sur la même circonférence que les points p, q, r. Pour établir cette proposition il suffit de faire voir que les lignes $p'Mp$, $q'Mq$, $r'Mr$ sont des lignes droites divisées chacune, au point M, en deux parties égales. Et il est bien facile de reconnaître que cela revient à démontrer que les droites MS_1, MS_2, MS_3, menées de M aux milieux S_1, S_2, S_3 des droites Pp', Pq', Pr', sont respectivement parallèles à Pp, Pq, Pr, et égales à $\frac{1}{2} Pp$, $\frac{1}{2} Pq$, $\frac{1}{2} Pr$.

On a

$$PS_1 = \frac{1}{2} Pp' = \frac{1}{n} P\alpha \quad \text{et} \quad PM = \frac{1}{n} PO;$$

d'où

$$\frac{PS_1}{PM} = \frac{P\alpha}{PO}:$$

donc MS_1 est parallèle à $O\alpha$, et, par suite, à Pp.

De plus,

$$MS_1 = \frac{1}{n} O\alpha.$$

Mais on sait que

$$O\alpha = \frac{1}{2} PA;$$

il en résulte

$$MS_1 = \frac{1}{2n} PA = \frac{1}{2} Pp.$$

Il est évident qu'on prouverait de même que les droites MS_2, MS_3 sont parallèles aux droites Pq, Pr, et égales à $\frac{1}{2}Pq$, $\frac{1}{2}Pr$.

La proposition est donc démontrée.

Note. — Cette première partie de la question 754 a de même été résolue par MM. E. Roudox, élève du lycée Charlemagne; V. Niébylowski, du lycée Bonaparte; H. Feuilles, et A. Viant, du Prytanée Militaire.

Quant à la condition de contact (p. 96), M. Niébylowski remarque qu'elle ne peut être généralement exprimée par l'égalité

$$\frac{1}{n} = 1 + \frac{r^2}{\rho^2};$$

car $\rho^2 = -2R^2 \cos A \cos B \cos C$, et, dans le cas du triangle rectangle, on a

$$\rho^2 = 0 \quad \text{et par suite} \quad \frac{1}{n} = \infty.$$

Question 725 (*);

PAR M. RENAUD,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

Résoudre algébriquement l'équation

$$[(x+2)^2 + x^2]^3 = 8x^4(x+2)^2.$$

Première méthode. — Posons

$$x + 2 = y,$$

l'équation devient

$$(y^2 + x^2)^3 = 8x^4y^2; \tag{1}$$

divisant les deux membres par y^6, on a

$$\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^3 = 8\frac{x^4}{y^4}. \tag{2}$$

(*) La solution donnée dans le numéro de juin renferme quelques inexactitudes.

Soit

$$z = \frac{x^2}{y^2},$$

l'équation (2) développée devient

(3) $$z^3 - 5z^2 + 3z + 1 = 0.$$

Cette équation admet la racine 1; elle peut donc s'écrire

$$(z-1)(z^2 - 4z - 1) = 0.$$

Ses racines sont donc 1, $2+\sqrt{5}$ et $2-\sqrt{5}$.

$z = 1$ donne $x^2 = (x+2)^2$ ou $x = -1$,

$z = 2+\sqrt{5}$ donne $x^2 = (x+2)^2(2+\sqrt{5})$,

(4) $$x^2(1+\sqrt{5}) + 4x(2+\sqrt{5}) + 4(2+\sqrt{5}) = 0;$$

les racines de cette équation (4) sont

$$x = \frac{-2(2+\sqrt{5}) \pm \sqrt{4(2+\sqrt{5})^2 - 4(1+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}}{1+\sqrt{5}},$$

$$x = \frac{-2(2+\sqrt{5}) \pm \sqrt{4(2+\sqrt{5})}}{1+\sqrt{5}};$$

ou, en rendant le dénominateur rationnel,

$$x = \frac{-3-\sqrt{5} \pm \sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2},$$

$z = 2-\sqrt{5}$ donnerait pour x les valeurs

$$x = \frac{-3+\sqrt{5} \pm \sqrt{2-2\sqrt{5}}}{2}.$$

En divisant par y^6, nous avons écarté le cas de $y = 0$; or, $y = 0$ donne $x = -2$ qui n'est pas racine de l'équation proposée; nous avons donc les seules racines de l'équation, trois sont réelles et négatives, les deux autres imaginaires.

Voici maintenant la méthode de M. Lebasteur.

Je pose

$$x + 1 = y;$$

j'ai alors

$$\begin{aligned}(y^2 + 1)^3 &= (y - 1)^4 (y + 1)^2 \\ &= (y^2 - 1)^2 (y - 1)^2.\end{aligned}$$

Soit

$$y + \frac{1}{y} = z.$$

Divisant les deux membres par y^3, l'équation s'écrit

$$\begin{aligned}\left(y + \frac{1}{y}\right)^3 &= \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 \frac{(y - 1)^2}{y} \\ &= \left(y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\right)\left(y + \frac{1}{y} - 2\right).\end{aligned}$$

Or,

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2;$$

on a donc

$$z^3 = (z^2 - 4)(z - 2); \quad \text{c'est-à-dire} \quad z^2 + 2z - 4 = 0,$$

équation dont les racines sont

$$z = -1 \pm \sqrt{5}.$$

Mais on a

$$y^2 - zy + 1 = 0, \quad y = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

et

$$x = y - 1, \quad x = \frac{z - 2 \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{(-1 \pm \sqrt{5})^2 - 4}}{2}.$$

Il faut ainsi ajouter la racine -1 fournie par l'hypothèse $y = 0$.

Les cinq racines sont donc

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{5} + \sqrt{2 \mp 2\sqrt{5}}}{2},$$

$$x_3 = \frac{-3 \pm \sqrt{5} - \sqrt{2 \mp 2\sqrt{5}}}{2};$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondant, les racines fournies par les signes inférieurs sont réelles; nous avons donc trois racines réelles.