NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Règle mnémonique pour obtenir les formules de Delambre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 417-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__417_0>

RÈGLE MNÉMONIQUE POUR OBTENIR LES FORMULES DE DELAMBRE;

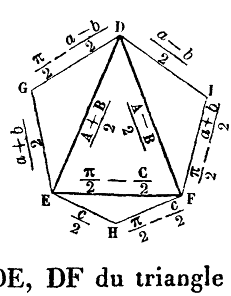
PAR M. GEORGES DOSTOR.

Néper, l'inventeur des logarithmes, a imaginé un moyen très-simple d'écrire avec certitude les relations qui existent entre les côtés et les angles du triangle sphérique rectangle. Son procédé est basé sur la construction d'un pentagone dit *pentagone de Néper*.

Les formules de Delambre sont plus compliquées que celles qui expriment les propriétés du triangle sphérique rectangle.

Cependant, par un procédé analogue à celui de Néper, on peut aussi les écrire tout de suite, sans erreur ni difficulté. Le principe de ce procédé graphique repose sur la construction d'un hexagone circonscrit à un triangle isocèle.

On construit un triangle isocèle DEF, auquel on circonscrit l'hexagone DGEHFI.



Sur les côtés DE, DF du triangle isocèle on écrit la demi-somme $\frac{A+B}{2}$ et la demi-différence $\frac{A-B}{2}$ des deux angles A et B du triangle sphérique; sur la base EF on marque le complément $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ de la moitié du troisième angle C.

Enfin, sur la suite des côtés de l'hexagone, à partir du sommet E, dans les deux sens EDF et EHF, on écrit les arcs

$$\frac{a+b}{2},\quad \frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2},\quad \frac{a-b}{2},\quad \frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2}$$

et

$$\frac{c}{2},\quad \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}.$$

Cela fait, voici la règle mnémonique que nous avons imaginée pour écrire les formules de Delambre.

Elle se compose des deux principes suivants :

1° *Le sinus d'un côté du triangle isocèle est à celui de la base dans le rapport des sinus des côtés sous-tendus dans l'hexagone* QUI NE SONT PAS ADJACENTS *au sommet commun du triangle.*

2° *Le cosinus d'un côté du triangle isocèle est à celui de la base dans le rapport des cosinus des côtés sous-tendus dans l'hexagone* QUI SONT ADJACENTS *au sommet commun du triangle.*

En effet, considérons le côté $DE = \frac{A+B}{2}$ et la base $EF = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ du triangle isocèle, qui ont le sommet commun E; le rapport des sinus de ce côté et de la base est

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}};$$

les côtés de l'hexagone sous-tendus par les côtés DE, EF du triangle, qui ne sont pas adjacents au sommet commun E, sont

$$\frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2},$$

dont les sinus ont pour rapport

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

en égalant ces deux rapports, on a la première formule de Delambre

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Si l'on compare, d'après la même règle, le côté $DF = \frac{A-B}{2}$ du triangle isocèle à la base $EF = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$, on en déduit

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

ou

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

qui est la deuxième formule de Delambre.

La deuxième règle fournit les deux autres formules

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)};$$

ou bien

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$