NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution d’une question du concours d’admission à l’École normale en 1865

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 414-416
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__414_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1865

(voir 2e série, t. IV, p. 424);

PAR M. A. R.

On considère n variables $x, y, z, \ldots, u, v$: décomposer le polynôme

$$p = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + v^2 + (x + y + z + \ldots + v)^2$$

composé de $(n+1)$ carrés, en la somme de n carrés de fonctions homogènes et du premier degré.

Prenons d'abord deux variables. Nous aurons

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$$

ou

$$2\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2} + 2y^2 = \frac{1}{1.2}(2x+y)^2 + \frac{1}{2.3}9y^2.$$

Pour trois variables, on a aussi

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x+y+z)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xz + 2yz + 2xy,$$

ou

$$2\left(x + \frac{y+z}{2}\right)^2 - \frac{(y+z)^2}{2} + 2y^2 + 2z^2 + 2yz,$$

ou encore

$$\frac{1}{1.2}(2x+y+z)^2+\frac{1}{2.3}(3y+z)^2+\frac{1}{3.4}(4z)^2.$$

On verrait de même que pour quatre variables on aurait

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2+u^2+(x+y+z+u)^2\\ =\frac{1}{1.2}(2x+y+z+u)^2+\frac{1}{2.3}(3y+z+u)^2\\ +\frac{1}{3.4}(4z+u)^2+\frac{1}{4.5}(5u)^2.\end{aligned}$$

La loi de formation est évidente. Je vais maintenant démontrer qu'elle est générale, c'est-à-dire que si elle est vraie pour n variables, elle s'appliquera au cas de $(n+1)$ variables.

Soient donc les n variables $x, y, z, \ldots, u, v$. Le développement sera

$$\begin{aligned}x^2+y^2+\ldots+v^2+(x+y+z+\ldots+v)^2\\ =\frac{1}{1.2}(2x+y+\ldots+v)^2\\ +\frac{1}{2.3}(3y+z+\ldots+v)^2+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}[(n+1)v]^2.\end{aligned}$$

Si le développement est général, je dois avoir, en admettant une variable t de plus :

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2+\ldots+v^2+t^2+(x+y+\ldots+v+t)^2\\ =\frac{1}{1.2}(2x+y+\ldots+t)^2+\frac{1}{2.3}(3y+\ldots+t)^2+\ldots\\ +\frac{1}{n(n+1)}[(n+1)v+t]^2+\frac{1}{(n+1)(n+2)}[(n+2)t]^2.\end{aligned}$$

Si de ce développement je retranche le développement précédent, j'aurai

$$
\begin{aligned}
&2t^2 + 2t(x + y + z + \ldots + v) \\
&= \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right] t^2 \\
&\quad + 2t\left[\frac{2x+y+\ldots+v}{1.2} + \frac{3y+z+\ldots+v}{2.3} + \ldots + \frac{(n+1)v}{n(n+1)}\right] \\
&\quad + \frac{n+2}{n+1} t^2.
\end{aligned}
$$

Mais la somme

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

peut s'écrire

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

chaque terme se dédoublant de la façon suivante

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Cette somme est donc égale à $\frac{n}{n+1}$. L'égalité précédente devient alors

$$
\begin{aligned}
&2t^2 + 2t(x + y + z + \ldots + v) \\
&= 2t^2 + 2t\left[\frac{2x+y+z+\ldots+v}{1.2}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{3y+z+\ldots+v}{2.3} + \ldots + \frac{(n+1)v}{n(n+1)}\right].
\end{aligned}
$$

Or, on voit facilement que le coefficient de $2t$ dans le second membre est égal à $x + y + z + \ldots + v$; donc cette égalité devient une identité, et par conséquent l'hypothèse dont nous sommes partis est exacte. Ainsi, la loi du développement est générale.