

Solution d'une question du concours d'admission à l'École normale en 1865

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 5
(1866), p. 414-416

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__414_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION D'UNE QUESTION
DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1865

(voir 2^e série, t. IV, p. 424);

PAR M. A. R.

On considère n variables x, y, z, \dots, u, v : décomposer le polynôme

$$p = x^2 + y^2 + z^2 + \dots + v^2 + (x + y + z + \dots + v)^2$$

composé de $(n + 1)$ carrés, en la somme de n carrés de fonctions homogènes et du premier degré.

Prenons d'abord deux variables. Nous aurons

$$x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$$

ou

$$2 \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{y^2}{2} + 2y^2 = \frac{1}{1.2} (2x + y)^2 + \frac{1}{2.3} 9y^2.$$

Pour trois variables, on a aussi

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xz \\ + 2yz + 2xy,$$

ou

$$2 \left(x + \frac{y+z}{2} \right)^2 - \frac{(y+z)^2}{2} + 2y^2 + 2z^2 + 2yz,$$

ou encore

$$\frac{1}{1.2}(2x + y + z)^2 + \frac{1}{2.3}(3y + z)^2 + \frac{1}{3.4}(4z)^2.$$

On verrait de même que pour quatre variables on aurait

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + (x + y + z + u)^2 \\ = \frac{1}{1.2}(2x + y + z + u)^2 + \frac{1}{2.3}(3y + z + u)^2 \\ + \frac{1}{3.4}(4z + u)^2 + \frac{1}{4.5}(5u)^2. \end{aligned}$$

La loi de formation est évidente. Je vais maintenant démontrer qu'elle est générale, c'est-à-dire que si elle est vraie pour n variables, elle s'appliquera au cas de $(n + 1)$ variables.

Soient donc les n variables x, y, z, \dots, u, v . Le développement sera

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \dots + v^2 + (x + y + z + \dots + v)^2 \\ = \frac{1}{1.2}(2x + y + \dots + v)^2 \\ + \frac{1}{2.3}(3y + z + \dots + v)^2 + \dots + \frac{1}{n(n+1)}[(n+1)v]^2. \end{aligned}$$

Si le développement est général, je dois avoir, en admettant une variable t de plus :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + \dots + v^2 + t^2 + (x + y + \dots + v + t)^2 \\ = \frac{1}{1.2}(2x + y + \dots + t)^2 + \frac{1}{2.3}(3y + \dots + t)^2 + \dots \\ + \frac{1}{n(n+1)}[(n+1)v + t]^2 + \frac{1}{(n+1)(n+2)}[(n+2)t]^2. \end{aligned}$$

Si de ce développement je retranche le développement

précédent, j'aurai

$$\begin{aligned}
 & 2t^2 + 2t(x + y + z + \dots + v) \\
 &= \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] t^2 \\
 &+ 2t \left[\frac{2x+y+\dots+v}{1.2} + \frac{3y+z+\dots+v}{2.3} + \dots + \frac{(n+1)v}{n(n+1)} \right] \\
 &+ \frac{n+2}{n+1} t^2.
 \end{aligned}$$

Mais la somme

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

peut s'écrire

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

chaque terme se dédoublant de la façon suivante

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Cette somme est donc égale à $\frac{n}{n+1}$. L'égalité précédente devient alors

$$\begin{aligned}
 & 2t^2 + 2t(x + y + z + \dots + v) \\
 &= 2t^2 + 2t \left[\frac{2x+y+z+\dots+v}{1.2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3y+z+\dots+v}{2.3} + \dots + \frac{(n+1)v}{n(n+1)} \right].
 \end{aligned}$$

Or, on voit facilement que le coefficient de $2t$ dans le second membre est égal à $x + y + z + \dots + v$; donc cette égalité devient une identité, et par conséquent l'hypothèse dont nous sommes partis est exacte. Ainsi, la loi du développement est générale.
