Sur l'approximation

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 407-414
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__407_1>

SUR L'APPROXIMATION;

PAR UN ABONNÉ.

Soit a une expression dont l'évaluation en décimales peut se pousser à un tel degré qu'on veut, et qui est une valeur approchée de A avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{10^n}$.

I. Soit $A = a + \alpha$.

L'erreur relative sera $\frac{\alpha}{A}$, et, suivant l'hypothèse, nous avons

$$\pm\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n}.$$

Nous supposerons que A et a sont des quantités positives.

1° Soit $\alpha > 0$.

Prenons dans le développement de a, n chiffres à partir d'un premier significatif; soit a' le nombre qu'ils forment, de sorte que

$$a = a' + \varepsilon \quad \text{et} \quad A = a' + \alpha + \varepsilon.$$

On aura

$$\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon < 1,$$

en unités du dernier ordre de a'.

L'inégalité

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n}$$

devient donc

$$\alpha < \frac{a' + \alpha + \varepsilon}{10^n};$$

d'où

$$\alpha\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) < \frac{a' + \varepsilon}{10^n},$$

puis

$$\alpha < \frac{a' + \varepsilon}{10^n - 1}.$$

Si les n chiffres dont a' se compose ne sont pas des 9, comme nous avons $\varepsilon < 1$, nous aurons là

$$a' + \varepsilon < 10^n - 1.$$

Donc

$$\alpha < 1; \quad \text{par conséquent} \quad \alpha + \varepsilon < 2.$$

Si on augmente a' d'une unité de son dernier ordre, le résultat sera donc une valeur approchée de A, soit par excès, soit par défaut, sans que l'erreur atteigne une unité de l'ordre du dernier chiffre.

Quand les chiffres de a' seront tous des 9, la différence $A - a' = \alpha + \varepsilon$ n'atteindra pas encore deux unités de l'ordre du dernier chiffre de a', pourvu qu'on ait

$$\varepsilon + \frac{a' + \varepsilon}{10^n - 1} < 2$$

ou

$$\varepsilon + \frac{\varepsilon}{10^n - 1} < 1,$$

$$\varepsilon < \frac{10^n - 1}{10^n} = \frac{99\cdots 9}{10^n} = 0{,}99\cdots 9,$$

c'est-à-dire que, si dans le développement de a les n chiffres qui suivent les n premiers ne sont pas eux-mêmes des 9 comme ces n premiers, a' sera une valeur approchée de A par défaut, à moins de deux unités de son dernier ordre. Donc, en augmentant a' d'une unité de ce dernier ordre, on aura encore une valeur approchée de A, par excès ou par défaut, sans que l'erreur aille jusqu'à une unité de cet ordre.

2° Soit $\alpha < 0$, avec $-\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n}$.

Comme précédemment, posons

$$a = a' + \varepsilon,$$

d'où

$$A = a' + \varepsilon + \alpha,$$

a' comprenant les n premiers chiffres de a.

Nous aurons

$$-\alpha < \frac{a' + \varepsilon + \alpha}{10^n};$$

là, au numérateur,

$$\alpha < 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}.$$

Donc, puisque

$$a' \leqq 10^n - 1 \quad \text{et} \quad a' + \varepsilon < 10^n,$$

on aura

$$a' + \varepsilon + \alpha < 10^n;$$

donc

$$-\alpha < 1.$$

Donc, dans

$$A = a' + \varepsilon + \alpha,$$

l'erreur $\varepsilon + \alpha$ est comprise entre -1 et $+1$. Dans ce cas, c'est la quantité a' elle-même qui sera une valeur approchée de A, par excès ou par défaut, à moins d'une unité de son dernier ordre.

Application. — Soit à diviser un nombre entier par un autre, au cas où le quotient est d'un seul chiffre; c'est le cas de toute division partielle pour un quotient de plusieurs chiffres.

Si on prend pour diviseur partiel l'ensemble des deux premiers chiffres du diviseur, ce diviseur partiel sera une valeur approchée du diviseur avec une erreur relative $< \frac{1}{10}$, et par défaut. De là le quotient par excès, et avec une erreur relative également moindre en sa valeur absolue que $\frac{1}{10}$. Donc, si l'on y prend un chiffre, on en aura une valeur approchée à moins d'une unité par excès ou par défaut.

Le chiffre amené par la division partielle sera donc le chiffre voulu, ou le surpassera seulement d'une unité. Si l'on en fait l'essai, au cas où il devra être rejeté, le nombre inférieur d'une unité sera le bon chiffre.

II. En usant des mêmes notations qu'auparavant, soit K le premier chiffre de a ou de A, et soit

$$\pm \frac{\alpha}{A} < \frac{1}{(K+1)\,10^n}; \quad \text{d'où} \quad \pm \alpha < \frac{A}{(K+1)\,10^n}.$$

1° Soit $\alpha > 0$.

Désignons par a' l'ensemble des $n+1$ premiers chiffres de a à partir d'un premier significatif.

Posons

$$a = a' + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad < 1,$$

en unités du dernier ordre de a'.

Nous aurons

$$\alpha < \frac{a' + \varepsilon + \alpha}{(K+1)\,10^n};$$

d'où

$$\alpha < \frac{a' + \varepsilon}{(K+1)\,10^n - 1}.$$

Si

$$a' < (K+1)\,10^n - 1 = K99\ldots9,$$

comme $\varepsilon < 1$, nous aurons

$$a' + \varepsilon < (K+1)\,10^n - 1.$$

Donc

$$\alpha < 1, \quad \alpha + \varepsilon < 2.$$

Alors on augmentera a' d'une unité de son dernier ordre, et l'on aura une valeur approchée de A, par excès ou par défaut, à moins d'une unité de ce dernier ordre de a'.

Si

$$a' = (K+1)\,10^n - 1 = K99\ldots9,$$

nous aurons encore $\alpha + \varepsilon < 2$, pourvu qu'on ait

$$\frac{\varepsilon}{(K+1)\,10^n - 1} + \varepsilon < 1$$

ou

$$\varepsilon < \frac{(K+1)\,10^n - 1}{(K+1)\,10^n},$$

$$\varepsilon < \frac{(K+1)(10^n - 1) + K}{(K+1)\,10^n},$$

$$\varepsilon < \frac{10^n - 1}{10^n} + \frac{K}{K+1}\,\frac{1}{10^n}:$$

cette condition sera remplie dès qu'on aura

$$\varepsilon < \frac{10^n - 1}{10^n} = 0{,}99\ldots9.$$

Donc, quand dans le développement de a les n chiffres qui suivent K sont des 9, il suffit que les n chiffres qui suivraient ceux-là ne soient pas tous des 9, pour que a' soit par défaut une valeur approchée de A à moins de deux unités de son dernier ordre, de sorte qu'en augmentant a' d'une unité de cet ordre, l'erreur ne montera plus à une unité en plus ou en moins.

2° Si on a $\alpha < 0$, l'inégalité sera

$$-\alpha < \frac{A}{(K+1)\,10^n} = \frac{a' + \varepsilon + \alpha}{(K+1)\,10^n} < \frac{a' + \varepsilon}{(K+1)\,10^n},$$

et il s'ensuit

$$-\alpha < 1.$$

Donc

$$\pm(\alpha + \varepsilon) < 1.$$

Donc alors a' est une valeur approchée, en plus ou en moins, sans erreur montant à une seule unité.

Application.—On déduit de là que pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal A, si l'on y connaît m chiffres à partir d'un premier significatif, on peut évaluer m chiffres dans la racine, à moins d'une unité de l'ordre du dernier de ces chiffres, en plus ou en moins, si la première tranche est d'un seul chiffre; et, lorsque la première tranche est de deux chiffres, cela a lieu aussi, pourvu que le premier chiffre de cette tranche ne soit pas inférieur à 4. A défaut de cette condition on pourra évaluer $m - 1$ chiffres dans la racine.

Si, à la place de $\sqrt{A(A+\alpha)}$, on prend $a = A + \frac{\alpha}{2}$, on trouve, α étant > 0, que l'erreur relative est

$$E_r < \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2;$$

donc, si on a

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^n},$$

on pourra évaluer, par a, $2n+1$ chiffres, à moins que le premier n'y soit 8 ou 9; dans ce cas on s'arrêtera à $2n$ chiffres.

En conséquence, si A et A′ sont des nombres ayant $n+1$ chiffres communs, leur différence $\alpha = A' - A$ étant moindre qu'une unité de l'ordre du dernier de ces chiffres, et K désignant le premier chiffre de cette différence, on aura

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{K\,10^n};$$

d'où

$$E_r < \frac{1}{8K^2}\,\frac{1}{10^{2n}}.$$

De là, dans tous les cas, si $K > 1$, au moins $2n+1$ chiffres par $a = \frac{A+A'}{2}$, et si $K \geqq 4$, $2n+2$ chiffres.

Il est même à observer que si α se trouvait moindre que $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}, \ldots$, on aurait, par a, soit 2, soit 4 chiffres de plus.

Nous venons de supposer, il est vrai, que les chiffres du résultat qui suivent le premier ne sont pas tous des 9, ou que la condition précédemment reconnue soit remplie.

Pour la racine cubique d'un nombre développé en décimales, si la première tranche à considérer dans l'extraction est de 1 ou de 2 chiffres, on pourra évaluer *m* chiffres dans la racine à partir d'un premier significatif, lorsqu'on en connaîtra *m* dans le nombre. Si la première tranche est de trois chiffres, et que le premier chiffre ne soit pas inférieur à 3, il en sera de même. Dans le cas contraire, il conviendra de se borner à $n-1$ chiffres dans la racine.