NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. HABICH

Sur la transformation des lignes planes par la méthode des rayons vecteurs réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 399-407

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__399_0>

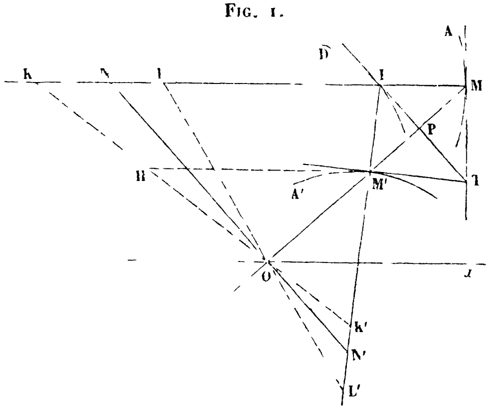
SUR LA TRANSFORMATION DES LIGNES PLANES PAR LA MÉTHODE DES RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES;

Par M. E. HABICH,
Directeur de l'École superieure polonaise.

Soient A une ligne plane donnée, A′ sa réciproque, O le pôle de transformation; on a

$$rr' = \pm a^2. \tag{1}$$

Fig. 1.



Menons par les points correspondants M et M′ les tangentes MT et M′T et les normales MN et M′N′; on sait que

$$\text{OMT} + \text{OM'T} = 180^\circ, \tag{2}$$

$$\text{MM'T} = \text{M'MT} \quad \text{et} \quad \text{NMO} = \text{N'M'O}.$$

Supposons en premier lieu que la puissance de transformation a^2 soit positive.

En prolongeant la normale $M'N'$ jusqu'à son intersection avec la normale MN en I, les tangentes en M et M' jusqu'à leur intersection en T, et joignant T avec I, on trouve

$$MI = M'I, \quad MT = M'T \quad \text{et} \quad MP = M'P.$$

On voit par là que la ligne D, lieu géométrique des points tels que I, a tous ses points à égale distance de la courbe A et de sa réciproque A', que la droite IT perpendiculaire à MM', et passant par son milieu P, est tangente à la ligne D en I, et que le point P appartient à la podaire de cette ligne relative à l'origine O.

$$OP = p = \frac{r + r'}{2}.$$

Les lignes A et A' sont les enveloppes d'un cercle de rayon variable $MI = M'I = b$, dont le centre se déplace sur la courbe D.

Pour trouver la loi de variation du rayon b, soit $OI = R$, on a

$$(R + b)(R - b) = rr' = a^2;$$

d'où

$$b^2 = R^2 - a^2. \tag{3}$$

C'est-à-dire que le rayon b est égal à la tangente menée du point I au cercle d'inversion.

On sait que le cercle d'inversion est un cercle tracé autour de l'origine O avec a pour rayon.

On remarquera que

$$R > p = \frac{r + r'}{2} > \sqrt{rr'} = a. \tag{4}$$

Si $a = 0$, c'est-à-dire si la puissance devient nulle,

$r' = 0$, $p = \frac{r}{2}$, $b = R$, et la ligne D est le lieu des points également distants de l'origine O et de la courbe A.

Supposons, en second lieu, que la puissance de transformation soit négative et que l'on ait $rr' = -a^2$.

En faisant une construction semblable à celle qu'on a faite pour le cas de la puissance positive, on déterminera la ligne D et sa podaire.

Quant au rayon du cercle enveloppé, en observant que l'origine O est située à l'intérieur de ce cercle, on trouvera en valeur absolue

$$(5) \qquad (b + R)(b - R) = a^2 \quad \text{d'où} \quad b^2 = R^2 + a^2,$$

c'est-à-dire que le rayon b est égal à la distance du point I au point où la perpendiculaire à R élevée en O rencontre le cercle d'inversion.

Les lignes A et A′ peuvent être déterminées au moyen de la podaire P et de la distance variable $PM = PM'$, qui, dans le premier cas, est égale à la longueur de la tangente menée de P au cercle d'inversion et, dans le second cas, à la distance de P au point où la perpendiculaire élevée en O à OP rencontre ce cercle.

De là résulte que, connaissant la ligne D ou sa podaire, l'origine O et le rayon a du cercle d'inversion, on peut trouver les lignes A et A′.

Remarque I. — Quand $a^2 = 0$, la courbe D est le lieu des points également distants de l'origine O et de la ligne A. On sait que, dans ce cas, la ligne A est la roulette du point O considéré comme lié invariablement à la courbe D lorsqu'on fait rouler cette courbe D sur une autre courbe fixe égale. On peut généraliser ce théorème.

Supposons que la ligne D soit le lieu des points également distants de la ligne B et d'une autre ligne C : en faisant rouler la courbe D sur une autre courbe fixe égale, la ligne B, considérée comme liée invariablement à la courbe mobile D, aura pour enveloppe sur le plan fixe la ligne C, et réciproquement.

Remarque II. — Si on prend la ligne A pour anticaustique des rayons lumineux incidents, et la courbe D pour dirimante, la ligne A' sera l'anticaustique des rayons réfléchis, et réciproquement.

Dans le cas de $a^2 = 0$, la ligne A' se réduit à un point (foyer).

Applications. — Supposons que la ligne A soit un cercle $r = a\cos\theta$, a^2 étant la puissance de transformation, on trouve pour A' une droite $r' = \frac{a}{\cos\theta}$, la podaire est une courbe du troisième degré, et la ligne D une parabole.

Si la puissance est négative, on a pour A', $r' = -\frac{a}{\cos\theta}$, la podaire est une cissoïde, et la ligne D une parabole.

La remarque I nous montre que : *lorsqu'une parabole roule sur une parabole fixe égale, toutes les droites parallèles à la directrice ont pour enveloppes des cercles dont les centres sont au foyer de la parabole fixe; et réciproquement, les cercles ayant pour centre le foyer de la parabole mobile ont pour enveloppes des droites parallèles à la directrice de la parabole fixe.*

Supposons encore que la ligne A soit une strophoïde $r = \frac{a(1 + \sin\theta)}{\cos\theta}$. Si la puissance est positive, la réciproque est la strophoïde elle-même; la podaire est une droite $p = \frac{a}{\cos\theta}$, et la ligne D une parabole.

Si la puissance a^2 est négative $-a^2$, la réciproque A' est une strophoïde symétrique de A; la podaire est une courbe du quatrième degré $p = a \tan\theta$, et la ligne D son antipodaire, etc.

Dans les *Nouvelles Annales*, t. IV, p. 144, M. Nicolaïdès a donné la relation

$$(6) \qquad \frac{n}{\rho} + \frac{n'}{\rho'} = 2;$$

n et n' sont les normales, ρ et ρ' les rayons de courbure de la ligne A et de sa réciproque A' aux points correspondants M et M' (*).

De cette relation nous allons en déduire une autre qui nous conduira à un théorème important; pour cela joignons le centre de courbure K de la ligne A correspondant au point M à l'origine O, et traçons par le point M' la parallèle M'H à la normale MN; cette parallèle viendra couper OK en H, et on aura

$$\frac{n}{\rho} = \frac{n'}{\mathrm{M'H}};$$

la relation deviendra

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\mathrm{M'H}} = \frac{2}{n'},$$

c'est-à-dire que *le centre de courbure de la réciproque* A' *est le conjugué harmonique du point* L' *déterminé sur la normale* M'N' *par la relation* M'L' = M'H.

En prolongeant OK jusqu'à son intersection avec la normale M'N' en K', on a l'angle L'ON' = l'angle N'OK';

(*) Nous supprimons ici une démonstration de ce théorème analogue à la seconde que M. Fouret en a donnée et que nous avons indiquée p. 169, note. P.

d'un autre côté, l'angle $N'OM'$ étant droit, on voit que le point K' est le conjugué harmonique du point L' par rapport aux points N' et M', donc ce point K' est le centre de courbure de la réciproque A' ; de là ce théorème remarquable :

Les centres de courbure de la ligne A *et de sa réciproque* A' *se trouvent sur une même droite passant par l'origine.*

Lorsqu'on fait varier la puissance de transformation a^2, les courbes réciproques de la ligne A sont homothétiques; d'où cet autre théorème :

Les centres de courbure des lignes homothétiques correspondant à des points homologues se trouvent sur une même droite passant par le centre d'homothétie.

Et encore :

Le centre de similitude d'un système de lignes homothétiques est aussi centre de similitude de leurs développées, des développées de ces dernières, et ainsi de suite.

Exemple. — Développantes successives des cercles concentriques ayant toutes leurs origines sur un même rayon vecteur.

Le théorème sur la similitude des développées successives des lignes homothétiques peut être démontré directement en partant de l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires et en prenant pour pôle le centre de similitude.

Pour donner une application des considérations précédentes, je vais indiquer la solution du problème des tangentes et des centres de courbure des lignes projectives horizontales des courbes d'ombre dans la vis à filet triangulaire et dans le cas des rayons lumineux parallèles.

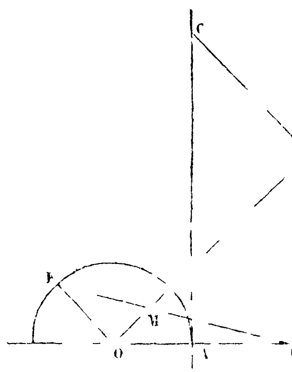
Pour cela considérons la courbe décrite par le sommet M de l'angle droit CMO, dont le côté indéfini MO passe constamment par un point fixe O, et dont l'autre côté MC $= b$ glisse par son extrémité C sur une droite fixe AC.

Soit OA $= a$, la plus courte distance de O à la droite AC. Prenons O pour pôle et OA pour axe polaire, on trouve

$$(1)\qquad \mathrm{OM} = r = \frac{a + b\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\theta = \mathrm{MOA}).$$

La courbe déterminée par cette équation (1) est la

Fig. 2.



réciproque de la projection horizontale de la courbe d'ombre.

Pour le démontrer faisons OB $= b$, traçons autour de A comme centre avec OA $= a$ pour rayon une circonférence, élevons en O une perpendiculaire à OM et joignons par une droite le point E où cette perpendiculaire rencontre le cercle OA avec le point B; la droite EB viendra couper OM au point M′ qui appartient à la projection horizontale de la courbe d'ombre.

La construction précédente a été donnée par M. Poncelet (*).

On trouve aisément que

$$\mathrm{OM}' = r' = \frac{ab\cos\theta}{a + b\sin\theta} \quad \text{d'où} \quad rr' = ab.$$

Si $b = a$, c'est-à-dire si le point B coïncide avec A, on a $rr' = a^2$, et les points M et M′ se trouvent sur une même courbe (strophoïde) (**).

Enfin, lorsque $b = \infty$, $r' = a\,\mathrm{cotang}\,\theta$, et la réciproque de cette dernière ligne est évidemment

$$r = \mathrm{tang}\,\theta \times \mathrm{const.}$$

Dans les deux derniers cas, lorsque $b = a$ et lorsque $b = \infty$, les courbes d'ombre (projections) sont décrites par le sommet de l'angle droit, et la considération de ce mouvement permet de trouver avec la plus grande facilité les normales, les centres de courbure, etc.

Dans le cas de $b \gtrless a$, on commencera par déterminer les normales, les centres de courbure, etc., de la réciproque M par la considération du mouvement, et on passera à la projection de la courbe d'ombre.

De cette manière, le problème se trouve résolu dans tous les cas.

Je terminerai en remarquant que les réciproques des coniques par rapport à un quelconque de leurs points pris pour origine sont des courbes du troisième degré de la

---

(*) *Voir :* Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. I, notes, p. 450 et 460; et de la Gournerie, *Traité de Géométrie descriptive*, t. III, p. 136 et suiv.

(**) Dans les nombreux articles que j'ai eu occasion de lire sur cette courbe remarquable, je n'ai pas vu qu'on ait remarqué ce mode de génération.

forme

$$r = \frac{A}{\cos\theta} + B\cos(\theta - \alpha),$$

où A, B et α sont des paramètres.

Ces courbes appartiennent, d'après Newton, à deux classes distinctes : à la classe des hyperboles défectives à diamètre, et à la classe des hyperboles défectives sans diamètre.