NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H.-G. ZEUTHEN

Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 385-398
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__385_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(voir page 289);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

VII. — *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont un contact du second ordre avec une courbe donnée et des contacts du premier ordre avec deux autres courbes.*

29. Désignons par $(C_{m,n})^r$ la condition d'un contact de l'ordre r avec la courbe $C_{m,n}$; le système actuel sera représenté par $[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2}]$. A ce système appartient toute conique infiniment aplatie :

1° Passant par un point d'intersection de C_{m_1,n_1} avec C_{m_2,n_2}, tangente à $C_{m,n}$ et limitée au point d'intersection et au point du contact;

2° Tangente à $C_{m,n}$ à son point de rencontre avec une des deux autres courbes, et limitée à ce point et à la troisième courbe;

3° Renfermée dans une tangente commune à $C_{m,n}$ et à l'une des deux autres courbes, limitée au point de contact avec $C_{m,n}$ et par la troisième courbe;

4° Renfermée dans une tangente d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitée par les deux autres courbes;

5° Passant par un point de rebroussement de $C_{m,n}$, limitée à ce point et à un point de rencontre de C_{m_1,n_1} avec C_{m_2,n_2};

6° Passant par un point de rebroussement de $C_{m,n}$, tangente à l'une des deux courbes C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2}, terminée à l'autre de ces deux courbes et au point de rebroussement.

Nous ne savons pas encore combien de fois on doit compter chacune de ces coniques singulières dans le nombre λ, mais nous leur attribuons les coefficients indéterminés x, y, z, u, v et s correspondant respectivement aux différentes classes que nous venons de nommer. Ces coefficients seront entiers et positifs (*) ; on trouve alors :

$$\begin{aligned}\lambda &= x.m_1m_2n + y(mm_1m_2 + mm_2m_1) + z(nn_1m_2 + nn_2m_1) \\ &\quad + u.t'm_1m_2 + v.d'm_1m_2 + s(d'n_1m_2 + d'n_2m_1) \\ &= (xn + 2ym + ut' + vd')\, m_1m_2 + (zn + sd')(m_1n_2 + m_2n_1).\end{aligned}$$

Si l'on transforme, au moyen du principe de dualité, une figure contenant deux courbes qui ont un contact de l'ordre r ou $(r+1)$ points consécutifs communs, les courbes réciproques auront en commun $r+1$ tangentes consécutives, c'est-à-dire un contact du même ordre. Si l'on transforme le système actuel, le système réciproque sera donc de la même espèce. Par conséquent on peut (comme aux n^{os} **11** et **12**) trouver ϖ en permutant, dans l'expression de λ, les lettres m et n, d et t, d' et t'. On trouve alors

$$\varpi = (xm + 2yn + ud' + vt')\, n_1n_2 + (zm + st')(m_1n_2 + m_2n_1),$$

(*) La supposition que les coefficients sont plus grands que zéro, implique celle que le système contient vraiment toutes les classes nommées de coniques infiniment aplaties. Nous ne profiterons de cette supposition que pour la deuxième ou la quatrième classe, c'est-à-dire pour le coefficient y ou u; car alors les équations indéterminées que nous trouverons n'accorderont la valeur zéro à aucun autre coefficient. Il suffit donc de s'assurer : 1° que le système ne contient pas d'autres coniques infiniment aplaties que celles que nous avons nommées, et 2° qu'il en contient vraiment de la deuxième ou de la quatrième classe. Ceci est bien évident, notamment pour la quatrième.

puis, au moyen des formules (1) et (2) du n° 1,

$$\mu = \mu''' m_1 m_2 + \mu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2,$$
$$\nu = \nu''' m_1 m_2 + \nu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2,$$

où

$$\mu' = \frac{1}{3}(xm + 2yn + ud' + vt'),$$

$$\mu'' = \frac{1}{3}[z(m + 2n) + s(2d' + t')],$$

$$\mu''' = \frac{2}{3}(2ym + xn + vd' + ut'),$$

$$\nu' = \frac{2}{3}(xm + 2yn + ud' + vt'),$$

$$\nu'' = \frac{1}{3}[z(2m + n) + s(d' + 2t')],$$

$$\nu''' = \frac{1}{3}(2ym + xn + vd' + ut'),$$

30. Pour le calcul des coefficients indéterminés on a (*voir* le n° 13)

$$\mu'' = \mathrm{N}[(\mathrm{C}_{m,n})^2, p_1, p_2, l] = \nu',$$
$$\mu''' = \mathrm{N}[(\mathrm{C}_{m,n})^2, p, l_1, l_2] = \nu''.$$

La première de ces équations donne

$$(2x - z)m + 2(2y - z)n + 2(u - s)d' + (2v - s)t' = 0,$$

ou, comme $d' = 3m - 3n + t'$ (*),

$$[2x - z + 6(u - s)]m + 2[2y - z - 3(u - s)]n$$
$$+ [2v - s + 2(u - s)]t' = 0.$$

Comme les trois nombres m, n et t' ne peuvent être liés

(*) *Voir* la formule IV dans la première note du n° 11.

par aucune équation, leurs coefficients doivent être égaux à zéro. On trouve donc

$$(\mathrm{I})\quad z - 2x = 2(2y - z) = 3(s - 2v) = 6(u - s).$$

L'équation $\mu''' = \nu''$ donne les mêmes résultats.

Pour achever le calcul des coefficients inconnus, nous déterminerons par d'autres moyens μ' dans le cas particulier où la courbe $C_{m,n}$ étant de l'ordre m a un point multiple de l'ordre $m-1$. Dans ce point coïncident $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, et la courbe ne contient pas d'autres points doubles ni points de rebroussement (*). Par conséquent

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2},\quad d' = 0$$

et selon les équations de M. Plücker

$$n = 2(m-1),\quad t = 2(m-2)(m-3),\quad t' = 3(m-2).$$

Nous désignerons par M cette courbe singulière que nous aurons à considérer aussi dans d'autres questions. Alors nous ferons toujours usage du *lemme* suivant.

31. Lemme. — *Un système de coniques qui ont un contact de l'ordre r avec une courbe* M *de l'ordre m douée d'un point multiple de l'ordre $m-1$, si nous désignons par q le nombre des points où une conique coupe la courbe* (**), *par α le nombre des coniques du*

(*) Nous supposons qu'aucun des points doubles qui coïncident ne se réduit à un point de rebroussement.

(**) q est en général égal à $2m-(r+1)$. Seulement dans le cas où les coniques ont avec $C_{m,n}$ d'autres contacts que celui de l'ordre r, il faut encore soustraire de ce nombre-ci, les points d'intersection qui coïncident avec les autres points de contact. Du reste, nous n'avons donné à *système dont le contact a lieu en un point donné, par* β *le nombre de celles qui coupent* M *en un point donné, contient* $q\alpha+\beta$ *coniques dont le point de contact coïncide avec un des* q *points d'intersection* (*si l'on n'a pas égard à la coïncidence qui a lieu lorsqu'une conique touche et coupe au point multiple différentes branches de* M).

Pour le prouver, on joint le point multiple par une droite X au point de contact θ d'une conique, et par des droites Y à ses points d'intersection p. Toute droite X ou Y détermine un seul point θ ou p et réciproquement. La coïncidence d'un point de contact θ avec un point d'intersection p de la même conique dépend donc de la coïncidence d'une droite X avec une droite correspondante Y.

Or, à une droite X ou à un point θ correspondent α coniques du système, et par conséquent $q\alpha$ points p ou $q\alpha$ droites Y, et à une droite Y ou à un point p correspondent β coniques, et par conséquent β points θ ou β droites X. Donc (théorème II, p. 195), $q\alpha+\beta$ droites X coïncident avec des droites correspondantes Y, d'où l'on conclut le lemme énoncé.

Si la conique dont un point de contact θ coïncide avec un point d'intersection p n'est pas infiniment aplatie, l'ordre du contact s'élève à $r+1$. Mais si elle est infiniment aplatie, les points θ et p qui coïncident peuvent appartenir l'un à l'une, et l'autre à l'autre des deux branches coïncidant de la conique, et alors l'ordre du contact restera le même.

32. Appliquons le lemme 31 au système (M, p_1, p_2, p_3),

---

notre lemme que la généralité nécessaire pour les applications, en omettant par exemple le cas facile où les coniques ont plusieurs contacts de l'ordre r.

où (*)

$$r = 1, \quad q = 2m - 2,$$
$$\alpha = N(M\theta, p_1, p_2, p_3),$$
$$\beta = N(M - p, p_1, p_2, p_3),$$

ou, selon la formule II du n° 23,

$$\beta = N(M, p, p_1, p_2, p_3) - 2N(M\theta, p_1, p_2, p_3),$$

et, par conséquent,

$$q\alpha + \beta = 2(m-2)N(M\theta, p_1, p_2, p_3) + N(M, p, p_1, p_2, p_3).$$

Or, d'après les formules (8) et (3) (**),

$$N(M\theta, p_1, p_2, p_3) = 1,$$
$$N(M, p, p_1, p_2, p_3) = 2m + n,$$

ou, comme $n = 2(m-1)$ (n° 30),

$$N(M, p, p_1, p_2, p_3) = 4m - 2.$$

Par conséquent,

$$q\alpha + \beta = 6(m-1).$$

Le système ne contient aucune conique infiniment aplatie. $q\alpha + \beta$ sera donc le nombre $N[(M)^2, p_1, p_2, p_3)$ des coniques qui passent par p_1, p_2, p_3 et ont avec M un contact du second ordre. On trouve pour le même nombre une autre expression, en remplaçant dans celle que nous

(*) Voir les notations du n° 23.

(**) La coïncidence des $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles de $C_{m,n}$, ne modifie pas les caractéristiques des systèmes, tant que les coniques n'ont pas plus de deux contacts avec cette courbe; car alors on ne regarde jamais à la fois plus de deux branches qui se coupent au même point. Les formules précédentes, (6) et (7) exceptées, sont donc encore vraies dans le cas où la courbe $C_{m,n}$ est remplacée par la courbe M. (Voir le n° 22.)

avons trouvée pour μ' dans le n° 29 (*), n par $2(m-1)$, d' par o, et t' par $3(m-2)$; ce qui donne

$$q\alpha + \beta = \frac{1}{3}[(x+4y+30)m - (4y+60)].$$

En égalant les deux expressions de $q\alpha+\beta$, on trouve

$$(x+4y+3v-18)m - (4y+6v-18) = 0.$$

m étant arbitraire, on doit avoir séparément,

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x+4y+3v &= 18,\\ 2y+3v &= 9. \end{aligned} \right.$$

33. Les équations (I) du n° 30 et (II) du n° 32 suffisent à déterminer les coefficients x, y, z, u, v, s, qui doivent être entiers et positifs. Sous cette condition la seconde équation (II) n'est satisfaite que par

$$y=3, \quad v=1.$$

Puis les autres équations donnent (**),

$$x=3, \quad z=6, \quad u=s=2.$$

Par la substitution de ces valeurs dans les expressions trouvées au n° 29, on obtient la solution (***) suivante :

$$(11a)\left\{ \begin{aligned} &\mu' = \nu''' = 3n + d' = 3m + t',\\ &\nu' = \mu'' = \nu'' = \mu''' = 2(3n+d') = 2(3m+t'), \end{aligned} \right.$$

$$(11b)\left\{ \begin{aligned} &[(C_{m,n})^2, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2}] \equiv [(\mu''' m_1 m_2 + \mu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2,\\ &\qquad\qquad \nu''' m_1 m_2 + \nu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2]\\ &[(C_{m,n})^2, p_1, p_2] \equiv (\mu', \nu'),\\ &[(C_{m,n})^2, p, l] \equiv (\mu'', \nu''),\\ &[(C_{m,n})^2, l_1, l_2] \equiv (\mu''', \nu'''). \end{aligned} \right.$$

(*) *Voir* la note précédente.

(**) $y=0$ donnerait $v=3$, puis $u=0$, ce qui justifie la remarque faite dans la note du n° 29.

(***) M. Cremona l'a trouvée d'une autre manière (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 7 novembre 1864).

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, les formules ($11a$) sont remplacées par

$$(11c)\qquad \begin{cases} \mu' = \nu''' = 3m(m-1), \\ \nu' = \mu'' = \nu'' = \mu''' = 6m(m-1). \end{cases}$$

Pour $m = 2$, $\mu' = \nu''' = 6$, $\nu' = \mu'' = \nu'' = \mu''' = 12$.

34. Il faut retenir pour la solution d'autres problèmes les valeurs des coefficients x, y, z, u, v et s. Dans l'expression de λ ces coefficients appartiennent aux différentes espèces de coniques infiniment aplaties que nous avons énumérées au n° 29, et dans l'expression de ϖ ils doivent appartenir aux différentes espèces de coniques à point double, qui y sont corrélatives; ce qui donne lieu aux propositions suivantes :

Pour un système de coniques qui ont un contact du second ordre avec une courbe donnée $C_{m,n}$, *et des contacts du premier ordre avec deux autres courbes* C_{m_1,n_1}, et C_{m_2,n_2}, *il faut compter, dans le nombre* λ :

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie passant par un point d'intersection de* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2}, *tangente à* $C_{m,n}$ *et limitée au point d'intersection et au point de contact;*

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie, tangente à* $C_{m,n}$ *en un point de rencontre avec une des deux autres courbes, limitée à ce point et à la troisième courbe;*

Six fois, *toute conique infiniment aplatie, renfermée dans une tangente commune à* $C_{m,n}$ *et à l'une des deux autres courbes, limitée au point de contact avec* $C_{m,n}$ *et à la troisième courbe;*

Deux fois, *toute conique infiniment aplatie, renfermée dans une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$, *limitée par* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2};

Une fois, *une conique infiniment aplatie, limitée à un* *point de rebroussement de* $C_{m,n}$ *et à un point de rencontre de* C_{m_1,n_1} *avec* C_{m_2,n_2};

Deux fois, *toute conique infiniment aplatie, limitée à un point de rebroussement de* $C_{m,n}$, *tangente à l'une et limitée à l'autre des deux courbes* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2};

Et, dans le nombre ϖ :

Trois fois, *toute conique à point double, composée d'une tangente commune à* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2} *et de la tangente à* $C_{m,n}$ *en l'un des points où elle est rencontrée par la première droite;*

Trois fois, *toute conique à point double, composée d'une tangente commune à* $C_{m,n}$ *et à l'une des deux autres courbes, et d'une tangente à l'autre menée par le point où la première droite touche* $C_{m,n}$;

Six fois, *toute conique à point double composée de la tangente à* $C_{m,n}$ *en l'un des points d'intersection avec l'une des courbes* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2} *et d'une tangente menée par le même point à l'autre;*

Deux fois, *toute conique ayant un point double en un point de rebroussement de* $C_{m,n}$ *et composée de tangentes menées par ce point aux deux autres courbes;*

Une fois, *toute conique à un point double composée d'une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$ *et d'une tangente commune à* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2};

Deux fois, *toute conique à point double composée d'une tangente d'inflexion à* $C_{m,n}$, *et d'une tangente menée à l'une des courbes* C_{m_1,n_1} *et* C_{m_2,n_2} *par un point de rencontre de l'autre avec la première droite.*

VIII. — *Détermination des caractéristiques des systèmes de coniques qui ont un contact du second ordre et deux du premier ordre avec deux ou avec une seule courbe données.*

35. Ces systèmes sont :

1° $[(C_{m,n})^2,\ 2C_{m_1,n_1}]$;

2° $[(C_{m,n})^2,\ C_{m,n},\ C_{m_1,n_1}]$, dont les coniques ont deux contacts avec la courbe $C_{m,n}$, l'un du second et l'autre du premier ordre, et un contact du premier ordre avec C_{m_1,n_1};

3° $[(C_{m,n})^2,\ 2C_{m,n}]$ dont les coniques ont avec $C_{m,n}$ trois contacts l'un du second et les deux autres du premier ordre.

Les théorèmes du n° 34 sont encore vrais pour ces systèmes, où deux ou trois courbes données coïncident; mais outre les coniques singulières nommées dans les énoncés de ces théorèmes, il y en a d'autres qui sont propres aux deux derniers systèmes.

36. On trouve pour le système $[(C_{m,n})^2,\ 2C_{m_1,n_1})$

$$\lambda = 3.d_1 n + 3mm_1(m_1 - 1) + 6.nn_1(m_1 - 2) + 2.t'\frac{m_1(m_1-1)}{2} + 1.d'd_1 + 2.d'n_1(m_1 - 2),$$

$$\varpi = 3.t_1 m + 3.nn_1(n_1 - 1) + 6.mm_1(n_1 - 2) + 2.d'\frac{n_1(n_1-1)}{2} + 1.t't_1 + 2.t'm_1(n_1 - 2).$$

Puis, on trouve, comme à l'ordinaire, les valeurs de μ et ν qui, réduites au moyen des formules de M. Plücker, deviennent

$$(12a)\ (*)\quad \begin{cases} \mu = (3n + d')(m_1^2 + 2m_1n_1 - 5m_1 + t_1), \\ \nu = (3n + d')(n_1^2 + 2m_1n_1 - 5n_1 + d_1), \end{cases}$$

qu'on peut substituer dans la relation

$$(12b)\qquad [(C_{m,n})^2,\ 2C_{m_1,n_1}] \equiv (\mu,\ \nu).$$

Si $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} sont des courbes générales des ordres m et m_1, on doit remplacer $(12a)$ par

$$(12c)\quad \begin{cases} \mu = \dfrac{3}{2} m(m-1)m_1(m_1-1)(m_1^2 + 3m_1 - 8), \\ \nu = 3\,m(m-1)m_1(m_1-1)(m_1^2 + m_1 - 5). \end{cases}$$

Pour $m = m_1 = 2$, on trouve $\mu = \nu = 12$.

37. Dans le système $[(C_{m,n})^2,\ C_{m,n},\ C_{m_1,n_1}]$, on trouve, à côté des coniques infiniment aplaties nommées au n° 34, d'autres qui sont renfermées dans les tangentes d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitées aux points d'inflexion et à C_{m_1,n_1}. Introduisons-les dans l'expression de λ avec le coefficient x, et nous aurons

$$\begin{aligned} \lambda = {} & 3.mm_1(n-2) + 3.[mm_1(m-2) + 2dm_1] \\ & + 6.[nn_1(m-2) + 2tm_1] + 2.t'(m-3)m_1 \\ & + 1\,d'\,mm_1 + 2[d'(n-3)m_1 + d'n_1(m-2)] + x.t'm_1. \end{aligned}$$

Puis, le principe de dualité donne :

$$\begin{aligned} \varpi = {} & 3.nn_1(m-2) + 3.[nn_1(n-2) + 2tn_1] \\ & + 6.[mm_1(n-2) + 2dn_1] + 2.d'(n-3)n_1 \\ & + 1.t'(nn_1 + 2.[(t'm - 3)n_1 + t'm_1(n-2)] + x.d'n_1. \end{aligned}$$

(*) Ces formules résultent aussi des formules (4) et (11) au moyen de méthodes données par MM. Chasles et Cremona (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 22 août et 7 novembre 1864).

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2) du n° 1, on trouve

$$\mu = \mu'' m_1 + \mu' n_1,$$
$$\nu = \nu'' m_1 + \nu' n_1.$$

Nous nous contenterons, pour le moment, de déterminer μ'' et ν'. Leurs expressions, au moyen des formules de M. Plücker, seront

$$\mu'' = 3(m+n)(m+n-4) + (t'+d')(m+n-12) + \frac{2}{3}(x-5)t',$$

$$\nu' = 3(m+n)(m+n-4) + (t'+d')(m+n-12) + \frac{2}{3}(x-5)d'.$$

Or, on prouve, comme à l'ordinaire, que

$$\mu'' = \mathrm{N}[(\mathrm{C}_{m,n})^2, \mathrm{C}_{m,n}, p, l] = \nu';$$

donc

$$x = 5.$$

En introduisant cette valeur dans les expressions de λ et ϖ, et continuant la détermination et la déduction de μ et ν, on trouve la solution suivante du problème actuel:

$$(13a)\,(*)\quad \begin{cases} \mu' = 3(2mn + n^2 + 4m - 10n) + 2(m+n-14)d', \\ \mu'' = \nu' = 2(3n + d')(m+n-12) + 24(m+n), \\ \nu'' = 3(m^2 + 2mn - 10m + 4n) + (m+2n-14)t'; \end{cases}$$

(*) Les formules (13a) donnent la simple relation

$$\mu' - \nu'' = md' - nt'.$$

La dissymetrie des valeurs de μ'' et ν' n'est qu'apparente, car selon la formule (IV) de la première note du n° 11

$$3n + d' = 3m + t'.$$

$$(13b)\quad \begin{cases} [(C_{m,n})^2,\ C_{m,n},\ C_{m_1,n_1}] \equiv (\mu'' m_1 + \mu' n_1,\ \nu'' m_1 + \nu' n_1), \\ [(C_{m,n})^2,\ C_{m,n},\ p] \equiv (\mu',\ \nu'), \\ [(C_{m,n})^2,\ C_{m,n},\ l] \equiv (\mu'',\ \nu''), \end{cases}$$

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'orde m, on doit remplacer ($13a$) par

$$(13c)\quad \begin{cases} \mu' = 3m(m-2)(m^2+2m-7), \\ \mu'' = \nu' = 6m(m-2)^2(m-3), \\ \nu'' = 3m(m-2)(2m^2+m-7). \end{cases}$$

Pour $m = 2$, on trouve $\mu' = \mu'' = \nu' = \nu'' = 0$.

38. Pour le coefficient x qui appartient dans λ à la nouvelle espèce de coniques infiniment aplaties, et dans ϖ aux coniques corrélatives à point double, nous avons trouvé la valeur 5. Donc :

Pour un système de coniques qui ont deux contacts avec une courbe $C_{m,n}$, *l'un du second et l'autre du premier ordre, et un contact du premier avec une autre courbe donnée* C_{m_1,n_1}, *on doit compter :*

Dans le nombre λ : Cinq fois, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$ *et limitée au point d'inflexion et à* C_{m_1,n_1};

Et dans le nombre ϖ : Cinq fois, *toute conique ayant un point double en un point de rebroussement de* $C_{m,n}$ *et composée de la tangente de rebroussement et d'une tangente à* C_{m_1,n_1}.

Ces théorèmes sont encore vrais si $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} coïncident.

39. Le système $[(C_{m,n})^2,\ 2C_{m,n}]$ ne contient de coniques singulières que celles qui sont nommées aux

n^{os} 34 et 38. Donc :

$$\lambda = 3.d(n-4) + 3.2d(m-3) + 6.2t(m-4)$$
$$+ 2.t'\frac{(m-3)(m-4)}{2} + 1.d'd$$
$$+ 2.d'(n-3)(m-4) + 5.t'(m-3),$$
$$\varpi = 3.t(m-4) + 3.2t(n-3) + 6.2d(n-4)$$
$$+ 2d'\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 1.t't$$
$$+ 2.t'(m-3)(n-4) + 5.d'(n-3),$$

d'où

$$(14a)\quad \begin{cases} \mu = (2m+n-7)[6t + d'(n-3)] \\ \qquad + [(m-n)(m+n-5)+t](3n+d'-36) \\ \qquad + 12(m-n)(m+n-3), \\ \nu = (m+2n-7)[6d + t'(m-3)] \\ \qquad + [(n-m)(m+n-5)+d](3m+t'-36) \\ \qquad + 12(n-m)(m+n-3); \end{cases}$$

$$(14b)\qquad [(C_{m,n})^2,\ 2C_{m,n})] \equiv (\mu, \nu).$$

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on trouve

$$(14c)\quad \begin{cases} \mu = \frac{3}{2}m(m-2)(m-3)(m^3+6m^2-9m-46), \\ \nu = 3m(m-2)(m-3)(m^3+4m^2-8m-23). \end{cases}$$

Pour $m = 2$ ou $m = 3$ on trouve $\mu = \nu = 0$.

(*La suite prochainement.*)