

R. ALEXANDRE

**Méthode pour résoudre les équations
du 3^e degré en amenant dans le premier
membre un cube parfait**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 5
(1866), p. 358-360

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__358_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉTHODE

pour résoudre les équations du 3^e degré en amenant dans le premier
membre un cube parfait ;

PAR M. R. ALEXANDRE.

Le type général des équations du troisième degré est

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Si nous y remplaçons x par $y + h$, y étant une nouvelle inconnue, et h une indéterminée, nous aurons une équation de la même forme en y :

$$(1) \quad y^3 + p'y^2 + q'y + r' = 0,$$

dans laquelle on a

$$\begin{aligned} p' &= 3h + p, \\ q' &= 3h^2 + 2ph + q, \\ r' &= h^3 + ph^2 + qh + r. \end{aligned}$$

L'indétermination de h nous permet d'établir une relation entre ces trois coefficients; posons donc

$$(2) \quad 3p'r' = q'^2;$$

ou, p' , r' , q' étant remplacés par leurs valeurs,

$$3(3h + p)(h^3 + ph^2 + qh + r) = (3h^2 + 2ph + q)^2.$$

Développée et ordonnée, cette équation se réduit à

$$h^2(3q - p^2) + h(9r - pq) + 3pr - q^2 = 0.$$

Supposons que dans l'équation (1), on ait remplacé h par une de ses valeurs, et divisons tous ses termes par r' , nous aurons

$$\frac{y^3}{r'} + \frac{p'y^2}{r'} + \frac{q'y}{r'} + 1 = 0.$$

Changeons une dernière fois d'inconnue, en faisant

$$\frac{y}{r'^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{z},$$

l'équation deviendra

$$(3) \quad \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{p'}{r'^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{q'}{r'^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{1}{z}\right) + 1 = 0.$$

Multiplions tout par z^3 , cela donne

$$z^3 + \frac{q'}{r'^{\frac{2}{3}}}z^2 + \frac{p'}{r'^{\frac{1}{3}}}z + 1 = 0.$$

Faisons maintenant, pour mieux mettre en évidence

(360)

le résultat que nous avons obtenu :

$$\frac{q'}{r'^{\frac{2}{3}}} = n.$$

Comme nous avons posé

$$3p'r' = q'^2,$$

nous aurons aussi

$$\frac{3p'r'}{r'^{\frac{1}{3}}} = \frac{q'^2}{r'^{\frac{1}{3}}},$$

ou encore

$$\frac{p'}{r'^{\frac{1}{3}}} = \frac{q'^2}{3r'^{\frac{4}{3}}} = \frac{n^2}{3}.$$

L'équation (3) devient alors

$$z^3 + nz^2 + \frac{n^2}{3}z + 1 = 0,$$

et peut s'écrire

$$z^3 + 3\frac{n}{3}z^2 + 3\frac{n^2}{9}z + \frac{n^3}{27} = \frac{n^3}{27} - 1.$$

Et l'on tire de cette équation, le premier membre étant un cube parfait,

$$z = -\frac{n}{3} + \sqrt[3]{\frac{n^3}{27} - 1}.$$

Remarquons que n est ici entièrement connu, et que l'on peut remonter de z à x , par l'intermédiaire de y , au moyen des relations très-simples :

$$y = \frac{r'^{\frac{1}{3}}}{z},$$

$$x = y + h = \frac{r'^{\frac{1}{3}}}{z} + h.$$
