R. Alexandre

Méthode pour résoudre les équations du 3e degré en amenant dans le premier membre un cube parfait

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 358-360

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__358_1>

MÉTHODE

pour résoudre les équations du 3e degré en amenant dans le premier membre un cube parfait;

PAR M. R. ALEXANDRE.

Le type général des équations du troisième degré est

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Si nous y remplaçons x par $y + h$, y étant une nouvelle inconnue, et h une indéterminée, nous aurons une équation de la même forme en y :

$$(1) \qquad y^3 + p'y^2 + q'y + r' = 0,$$

dans laquelle on a

$$p' = 3h + p,$$
$$q' = 3h^2 + 2ph + q,$$
$$r' = h^3 + ph^2 + qh + r.$$

L'indétermination de h nous permet d'établir une relation entre ces trois coefficients ; posons donc

$$(2) \qquad 3p'r' = q'^2;$$

ou, p', r', q' étant remplacés par leurs valeurs,

$$3(3h + p)(h^3 + ph^2 + qh + r) = (3h^2 + 2ph + q)^2.$$

Développée et ordonnée, cette équation se réduit à

$$h^2(3q - p^2) + h(9r - pq) + 3pr - q^2 = 0.$$

Supposons que dans l'équation (1), on ait remplacé h par une de ses valeurs, et divisons tous ses termes par r', nous aurons

$$\frac{y^3}{r'} + \frac{p'y^2}{r'} + \frac{q'y}{r'} + 1 = 0.$$

Changeons une dernière fois d'inconnue, en faisant

$$\frac{y}{r'^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{z},$$

l'équation deviendra

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{p'}{r'^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{q'}{r'^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{1}{z}\right) + 1 = 0.$$

Multiplions tout par z^3, cela donne

$$z^3 + \frac{q'}{r'^{\frac{2}{3}}} z^2 + \frac{p'}{r'^{\frac{1}{3}}} z + 1 = 0.$$

Faisons maintenant, pour mieux mettre en évidence le résultat que nous avons obtenu :

$$\frac{q'}{r'^{\frac{2}{3}}} = n.$$

Comme nous avons posé

$$3p'r' = q'^2,$$

nous aurons aussi

$$\frac{3p'r'}{r'^{\frac{1}{3}}} = \frac{q'^2}{r'^{\frac{1}{3}}},$$

ou encore

$$\frac{p'}{r'^{\frac{1}{3}}} = \frac{q'^2}{3r'^{\frac{4}{3}}} = \frac{n^2}{3}.$$

L'équation (3) devient alors

$$z^3 + nz^2 + \frac{n^2}{3}z + 1 = 0,$$

et peut s'écrire

$$z^3 + 3\frac{n}{3}z^2 + 3\frac{n^2}{9}z + \frac{n^3}{27} = \frac{n^3}{27} - 1.$$

Et l'on tire de cette équation, le premier membre étant un cube parfait,

$$z = -\frac{n}{3} + \sqrt[3]{\frac{n^3}{27} - 1}.$$

Remarquons que n est ici entièrement connu, et que l'on peut remonter de z à x, par l'intermédiaire de y, au moyen des relations très-simples :

$$y = \frac{r'^{\frac{1}{3}}}{z},$$

$$x = y + h = \frac{r'^{\frac{1}{3}}}{z} + h.$$