

A. DE SAINT-GERMAIN

**Sur la plus courte distance de deux droites
quand elles deviennent parallèles**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 5
(1866), p. 346-348

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5_346_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES QUAND
ELLES DEVIENNENT PARALLÈLES ;**

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN,
Docteur ès Sciences, Agrégé de l'Université.

Étant données deux droites quelconques dont les équations sont :

$$\begin{aligned}x &= a z + p, & y &= b z + q, \\x &= a' z + p', & y &= b' z + q',\end{aligned}$$

on trouve la grandeur de leur plus courte distance en menant par l'une un plan P parallèle à l'autre, et prenant la distance d'un point de la dernière, par exemple de sa trace sur le plan xy à ce plan auxiliaire. On trouve ainsi :

$$(1) \quad \delta^2 = \frac{[(b' - b)(p' - p) - (a' - a)(q' - q)]^2}{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (ab' - ba')^2}.$$

Si les droites deviennent parallèles, cette formule est indéterminée, et on ne peut lever cette indétermination par les considérations seules qui nous ont servi à établir la formule, puisque le plan auxiliaire cesse d'être défini. Cependant, la formule s'appliquant, quelque petits que soient $a' - a$ et $b' - b$, on doit voir ce qu'elle devient quand ces différences tendent indéfiniment vers zéro. Or, quand les droites deviennent parallèles, la perpendiculaire commune devient indéterminée de position, et non

transportée à l'infini; en exprimant ce fait, on trouve entre $a' - a$ et $b' - b$ une relation qui conduit à la limite de l'expression (1).

Soient :

$$a' - a = \Delta a, \quad b' - b = \Delta b.$$

Si entre les équations de la perpendiculaire commune aux deux droites on élimine z (*), on a une équation qui convient à cette perpendiculaire :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (a' \Delta a + b' \Delta b) \{ (x - p) \Delta a + (y - q) \Delta b \\ \quad + (b \Delta a - a \Delta b) [b(x - p) - a(y - q)] \} \\ - (a \Delta a + b \Delta b) \{ (x - p') \Delta a + (y - q') \Delta b \\ \quad + (b \Delta a - a \Delta b) [b'(x - p') - a'(y - q')] \} = 0. \end{array} \right.$$

En regardant Δa et Δb comme de petites quantités du même ordre de petitesse, on remarque que le coefficient de x , savoir :

$$\Delta a (\Delta a^2 + \Delta b^2) + \Delta a (b \Delta a - a \Delta b)^2$$

est de l'ordre de Δa^3 ; il en est de même du coefficient

(*) L'élimination de z est indiquée par la question que l'on traite ici. Il s'agit, en définitive, de déterminer la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{a' - a}{b' - b}$, quand a' et b' convergent vers a et b . Or, $\frac{a' - a}{b' - b}$ est, au signe près, le coefficient angulaire de la projection sur le plan xy , de la perpendiculaire commune aux deux droites proposées. Car en désignant par

$$x = Az + \alpha, \quad y = Bz + \epsilon$$

les équations de cette perpendiculaire commune, on a

$$Aa + Bb + 1 = 0, \quad Aa' + Bb' + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{a' - a}{b' - b} = -\frac{B}{A}.$$

La limite de $\frac{a' - a}{b' - b}$ est par conséquent la valeur que prend le coefficient angulaire $-\frac{B}{A}$ de la perpendiculaire commune, lorsque l'une des droites proposées devient parallèle à l'autre. G.

de y . Le terme constant est au contraire de l'ordre de Δa^2 , en sorte que cette droite serait rejetée à l'infini quand Δa est nul. Pour qu'elle reste à une distance finie et tendant à l'indétermination, il faut que les termes de l'ordre de Δa^2 dans la partie constante de (2) se détruisent; on trouve ainsi, en supprimant le facteur $a\Delta a + b\Delta b$ qui ne peut être nul, car (2) se réduirait à

$$b(x-p) - a(y-q) = 0,$$

ce qui est inadmissible; on trouve la condition :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta a}{(1+a^2)(q'-q) - ab(p'-p)} \\ \frac{\Delta b}{(1+b^2)(p-p') - ab(q-q')} \end{array} \right. = \frac{\Delta b}{(1+b^2)(p-p') - ab(q-q')}.$$

Cela posé, la formule (1) peut s'écrire

$$\delta^2 = \frac{[(p'-p)\Delta b - (q'-q)\Delta a]^2}{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2};$$

elle est homogène en Δb , Δa , qu'on peut remplacer par les valeurs proportionnelles d'après l'équation (3); alors on trouve en supprimant les facteurs communs haut et bas,

$$\delta^2 = \frac{(p'-p)^2 + (q'-q)^2 + [b(p'-p) - a(q'-q)]^2}{1 + a^2 + b^2}.$$

C'est précisément la distance de la trace sur le plan xy d'une des droites à l'autre, c'est-à-dire la distance cherchée dans le cas qui nous occupe.
