

ROUQUET

**Note sur l'intersection des deux courbes
du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 5
(1866), p. 343-346

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5_343_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR L'INTERSECTION
DES DEUX COURBES DU SECOND DEGRÉ;**

PAR M. ROUQUET,
Professeur au lycée de Pau.

Soient

$$a.x^2 + b.cy + c.y^2 + d.x + e.y + f = 0,$$

$$a'.x^2 + b'.xy + c'.y^2 + d'.x + e'.y + f' = 0,$$

les équations des deux courbes. En faisant, pour abrégér,

$$A = a + a'\lambda, \quad B = b + b'\lambda, \quad C = c + c'\lambda, \dots,$$

l'équation en λ se présente sous la forme

$$(1) \quad AE^2 + CD^2 - BDE + F(B^2 - 4AC) = 0.$$

Il s'agit de prouver que l'une au moins des racines réelles de l'équation (1) satisfait à la condition

$$B^2 - 4AC > 0.$$

A cet effet, résolvons l'équation

$$B^2 - 4AC = 0,$$

ou

$$(2) \quad (b + b'\lambda)^2 - 4(a + a'\lambda)(c + c'\lambda) = 0,$$

qui devient, en ordonnant par rapport à λ ,

$$(3) \quad (b'^2 - 4a'c')\lambda^2 + 2(bb' - 2ac' - 2a'c)\lambda + b^2 - 4ac = 0.$$

Il y a lieu de distinguer deux cas principaux.

$$1^{\circ} \quad b'^2 - 4a'c' > 0.$$

Si les racines de l'équation (3) sont imaginaires ou égales, toute valeur de λ donnera $B^2 - 4AC > 0$.

Supposons donc que les racines λ' et λ'' de l'équation (3) soient réelles et inégales.

Remarquons d'abord que ces racines donnent le même signe à la quantité $C = c + c'\lambda$. En effet, la valeur $\lambda = -\frac{c}{c'}$ qui annule C , rendant positif le premier membre de l'équation (2), puisqu'elle le réduit au terme qui est un carré parfait, est nécessairement en dehors des racines de cette équation. Par suite λ' et λ'' ne comprenant point la racine de l'équation $C = 0$ doivent donner même signe au binôme C . Admettons, pour fixer les idées, que ce signe soit positif.

Cela posé, les racines λ' et λ'' donnent à

$$(BE - 2CD)^2 - (B^2 - 4AC)(E^2 - 4CF)$$

une valeur positive, et comme on passe de cette expression au premier membre de l'équation (1), en divisant

par le facteur positif $4C$, λ' et λ'' satisferont à l'inégalité

$$(\alpha) \quad AE^2 + CD^2 - BED + F(B^2 - 4AC) > 0.$$

Dès lors, les quantités λ' et λ'' comprennent entre elles deux racines de l'équation (1), ou aucune.

Dans le premier cas, la racine réelle de l'équation (1), non comprise entre λ' et λ'' , donnera $B^2 - 4AC > 0$; dans le second, toutes les racines réelles de l'équation considérée rempliront cette condition.

Si les deux racines λ' et λ'' rendent C négatif, l'inégalité (α) change de sens, mais les conclusions sont les mêmes.

$$2^\circ \quad b'^2 - 4a'c' < 0.$$

On sait alors (voir les exercices de l'*Algèbre* de M. Bertrand, 1^{re} édition, p. 143) que les deux racines de l'équation (3) sont réelles. En outre, la valeur $\lambda = -\frac{c}{a}$, qui annule C , rendant positif le premier membre de l'équation (2), doit être comprise entre λ' et λ'' , et par suite, ces racines donnent à C des signes différents. Le premier membre de l'équation (1) étant toujours positif pour $\lambda = \lambda'$, et $\lambda = \lambda''$, conduira à des quotients positifs ou négatifs suivant le signe de C , et l'on aura alternativement pour l'une et l'autre des valeurs λ' et λ''

$$AE^2 + CD^2 - BED + F(B^2 - 4AC) < \quad \text{ou} \quad > 0.$$

Il en résulte que λ' et λ'' comprennent un nombre impair de racines réelles de l'équation (1).

Si elles comprennent une seule racine, celle-ci rendra positive la quantité $B^2 - 4AC$.

Si elles en comprennent trois, toutes ces valeurs donneront

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Le cas de $b'^2 - 4a'c' = 0$ se ramène aisément aux pré-

cédentes. En résumé, on voit directement, par l'examen de l'équation en λ , qu'il existe toujours un ou trois couples de sécantes réelles communes à deux courbes du second degré.
