Note sur l'intégration des équations différentielles simultanées et linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 2^e^ série, tome 5 (1866), p. 323-326

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__323_1>

(I)

NOTE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES ET LINÉAIRES.

La méthode d'Ampère pour la résolution des équations

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dy}{dx} + B\frac{dz}{dx} + Cy + Dz = E,\\ &A'\frac{dy}{dx} + B'\frac{dz}{dx} + C'y + D'z = E' \end{aligned}\right.$$

exige que l'on ramène ces deux équations à deux autres dont l'une ne contienne que $\frac{dy}{dx}$, et l'autre que $\frac{dz}{dx}$. On peut éviter cette opération préalable en procédant de la manière suivante.

Je suppose en premier lieu que les coefficients A, B, C, D, A', B', C', D' soient constants. J'ajoute les deux équations (I) après les avoir multipliées respectivement par 1 et par la constante θ. J'obtiens ainsi

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[(A + A'\theta)y + (B + B'\theta)z\right] \\ &\qquad + (C + C'\theta)y + (D + D'\theta)z = E + E'\theta. \end{aligned} \right.$$

Je pose

$$(2)\qquad (A + A'\theta)y + (B - B'\theta)z = u,$$

$$(3)\qquad \frac{C + C'\theta}{A + A'\theta} = \frac{D + D'\theta}{B + B'\theta} = k;$$

et l'équation linéaire (1) se réduit à l'équation linéaire

$$(4)\qquad \frac{du}{dx} + ku = E + E'\theta.$$

De la première des équations (3) on tire deux valeurs constantes (θ_1, θ_2) de l'inconnue θ. Soient u_1 et u_2 les valeurs correspondantes de u, obtenues en intégrant l'équation (4). On aura

$$(A + A'\theta_1)y + (B + B'\theta_1)z = u_1,$$
$$(A + A'\theta_2)y + (B + B'\theta_2)z = u_2,$$

d'où l'on déduira les valeurs des fonctions inconnues y et z.

Quand les coefficients des premiers membres des équations (1) sont des fonctions de x, on procède d'une façon analogue, mais en considérant θ comme une fonction de x. Dans ce cas le premier membre de l'équation (1) doit être diminué de

$$\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dA'}{dx}\theta+A'\frac{d\theta}{dx}\right)y+\left(\frac{dB}{dx}+\frac{dB'}{dx}\theta+B'\frac{d\theta}{dx}\right)z$$

termes qu'il a fallu ajouter pour compléter la dérivée de $(A+A'\theta)y+(B+B'\theta)z$ ou de u. L'équation qui donne les valeurs de θ est alors

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{C+C'\theta-\dfrac{dA}{dx}-\dfrac{dA'}{dx}\theta-A\dfrac{d\theta}{dx}}{A+A'\theta} \\ =\dfrac{D+D'\theta-\dfrac{dB}{dx}-\dfrac{dB'}{dx}\theta-B'\dfrac{d\theta}{dx}}{B+B'\theta}. \end{array}\right.$$

Cette équation est du premier ordre, mais non linéaire. Quand on saura l'intégrer, on aura deux valeurs de θ en attribuant à la constante arbitraire deux valeurs distinctes, et le calcul s'achèvera comme plus haut. On simplifie l'équation (5) en supposant que A et A' sont deux constantes, ce qui est toujours permis.

La méthode précédente s'étend facilement au cas de trois équations simultanées. Nous n'examinerons que le cas où les coefficients seront constants. Soient

$$(1')\quad \left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dy}{dx}+B\dfrac{dz}{dx}+C\dfrac{dt}{dx}+Dy+Ez+Ft=G, \\ A'\dfrac{dy}{dx}+B'\dfrac{dz}{dx}+C'\dfrac{dt}{dx}+D'y+E'z+F't=G', \\ A''\dfrac{dy}{dx}+B''\dfrac{dz}{dx}+C''\dfrac{dt}{dx}+D''y+E''z+F''t=G''. \end{array}\right.$$

J'ajoute ces équations respectivement multipliées par les constantes 1, θ, λ. J'aurai

$$
(1') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[(A + A'\theta + A''\lambda)y + (B + B'\lambda + B''\lambda)z \\
&\qquad\qquad\qquad + (C + C'\theta + C''\lambda)t] \\
&\quad + (D + D'\theta + D''\lambda)y + (E + E'\theta + E''\lambda)z \\
&\quad + (F + F'\theta + F''\lambda)t \\
&= G + G'\theta + G''\lambda.
\end{aligned}
\right.
$$

Je pose

$$
(2') \quad \left\{
\begin{aligned}
&(A + A'\theta + A''\lambda)y + (B + B'\theta + B''\lambda)z \\
&\qquad\qquad + (C + C'\theta + C''\lambda)t = u,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{D + D'\theta + D''\lambda}{A + A'\theta + A''\lambda} = \frac{E + E'\theta + E''\lambda}{B + B'\theta + B''\lambda} \\
&\qquad\qquad = \frac{F + F'\theta + F''\lambda}{C + C'\theta + C''\lambda} = k,
\end{aligned}
\right.
$$

et l'équation $(1')$ se réduit à l'équation linéaire

$$
(4') \qquad \frac{du}{dx} + ku = G + G'\theta + G''\lambda.
$$

Les équations $(3')$ donnent, tout calcul fait, trois valeurs de θ et trois valeurs correspondantes de λ. L'intégration de l'équation $(4')$ donnera trois valeurs correspondantes de u. Si l'on substitue à θ, λ, u dans l'équation $(2')$ tour à tour θ_1, λ_1, u_1 ; θ_2, λ_2, u_2 ; θ_3, λ_3, u_3, on aura trois équations pour déterminer les fonctions inconnues y, z, t.

On traiterait de la même manière des équations simultanées de la forme

$$
A\frac{d^m y}{dx^m} + B\frac{d^m z}{dx^m} + Cy + Dz = E,
$$

au moins quand A, B, C, D sont des constantes. P.