A. Sartiaux

# Théorème sur le tétraèdre

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 5 (1866), p. 317-321
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__317_1>

## THÉORÈME SUR LE TÉTRAÈDRE;

PAR M. A. SARTIAUX,
Élève de l'École Polytechnique.

M. Beltrami a énoncé dans les *Nouvelles Annales* (question 663, t. II, 2e série, p. 336) le théorème suivant :

*Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient toutes les arêtes du tétraèdre.*

On peut généraliser ce résultat et énoncer le théorème suivant :

*Les points divisant les vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque dans le rapport des distances de ces centres à un plan fixe sont sur une même surface du troisième ordre qui contient toutes les arêtes du tétraèdre.*

En effet, les centres des sphères inscrites sont définis par les égalités

$$x = y = z = t, \qquad x = y = z = -t,$$
$$x = y = -z = -t, \quad x = -y = -z = -t,$$
$$x = y = -z = t, \qquad x = -y = -z = t,$$
$$x = -y = z = t, \qquad x = -y = z = -t.$$

Nous prenons le tétraèdre donné comme tétraèdre de référence.

Soient

$$x = y = z = t, \quad x' = y' = z' = -t',$$

deux des centres, et soit

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0,$$

le plan fixe.

Soient $p$ et $p'$ les distances des deux centres au plan, on a

$$p = \mathrm{K}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)x, \quad x = y = z = t,$$
$$p' = \mathrm{K}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)x', \quad x' = y' = z' = -t',$$

et posant $\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{K}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha + \beta + \gamma - \delta)}$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{p} + \frac{x'}{p'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{p} + \frac{y'}{p'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{p} + \frac{z'}{p'}\right) = \lambda(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{p} + \frac{t'}{p'}\right) = -\lambda\delta,$$

le point

$$\mathrm{X}' = \mathrm{Y}' = \mathrm{Z}' = \mu.\lambda(\alpha + \beta + \delta), \quad \mathrm{T}' = -\mu.\lambda\delta$$

est évidemment sur la surface dont l'équation est

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{t} = 0,$$

car les valeurs de X', Y', Z', T', peuvent s'écrire

$$X' = \frac{\mu}{2pp'}(p'x + px'), \quad Y' = \frac{\mu}{2pp'}(p'y + py'),$$
$$Z' = \frac{\mu}{2pp'}(p'z + pz'), \quad T' = \frac{\mu}{2pp'}(p't + pt').$$

Mais si A, B, C, D, V représentent les faces du tétraèdre et son volume, on a

$$AX' + BY' + CZ' + DT' = 3V,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mu}{2pp'}[p'(Ax + By + Cz + Dt) + p(Ax' + By' + Cz' + Dt')] = 3V,$$

et comme

$$Ax + By + Cz + Dt = 3V, \quad Ax' + By' + Cz' + Dt' = 3V,$$
$$\mu = \frac{2pp'}{p + p'},$$

par suite,

$$X' = \frac{p'x + px}{p + p'}, \quad Y' = \frac{p'y + py'}{p + p'},$$
$$Z' = \frac{p'z + pz'}{p + p'}, \quad T' = \frac{p't + pt'}{p + p'}:$$

ce sont précisément les coordonnées du point divisant la distance des deux centres dans le rapport de leurs distances au plan fixe. Ainsi si le plan fixe a pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0,$$

la surface du troisième ordre a pour équation

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{t} = 0,$$

elle contient évidemment les arêtes du tétraèdre et est la surface inverse du plan fixe. Lorsque le plan fixe est le plan à l'infini on a le théorème de M. Beltrami.

Les quatre sommets sont des points doubles de la surface. Si l'on prolonge jusqu'au plan des trois autres les droites joignant un point double à un point de la surface, les pieds de ces quatre droites pris par groupes de trois déterminent quatre plans passant respectivement par un point fixe. Ces points fixes sont les points communs aux cônes tangents aux points doubles pris trois à trois. Ces cônes se coupent trois à trois en un seul point distinct des points doubles.

Pour une position d'un point de la surface ces quatre plans forment un tétraèdre dont les sommets sont les faces du tétraèdre des points doubles. Ces deux tétraèdres sont homologiques et le point de la surface est le centre d'homologie.

Cette surface est en même temps le lieu des points tels que les pieds des parallèles à quatre directions fixes arrêtées aux faces d'un tétraèdre soient dans un même plan. Nous pouvons prendre les distances aux faces comptées sur ces directions comme coordonnées d'un point. Exprimer que les pieds de ces quatre droites sont dans un même plan revient à dire que la somme algébrique des volumes des tétraèdres obtenus en prenant les coordonnées du point trois à trois est nulle. L'équation qui traduit cette condition est

$$\begin{aligned}\mathrm{YZT}\sin\widehat{\mathrm{YZT}} &+ \mathrm{XZT}\sin\widehat{\mathrm{XZT}} \\ &+ \mathrm{XYT}\sin\widehat{\mathrm{XYT}} + \mathrm{XYZ}\sin\widehat{\mathrm{XYZ}} = 0.\end{aligned}$$

Si l'on revient au système de coordonnées perpendiculaires aux faces du tétraèdre, l'équation prend la forme

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{t} = 0,$$

ce qui démontre la propriété. Ce sont des propriétés tout à fait analogues à celles des coniques circonscrites à un triangle. Nous avons vu que la surface passe par les arêtes du tétraèdre. Si l'on appelle R, R' les rayons de courbure aux deux points formant avec deux sommets un système harmonique, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.}$$

Les arêtes du tétraèdre appartiennent à la ligne parabolique de la surface.