NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H.-G. ZEUTHEN

Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 289-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__289_0>

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(voir page 241);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

VI. *Cas particuliers; systèmes de coniques qui ont des contacts du premier ordre avec des courbes particulières.*

22. Les formules que nous avons trouvées comprennent, comme toute formule générale, tous les cas particuliers; mais elles ne donnent pas toujours les résultats qu'on désire. Dans un cas particulier un système peut se diviser en plusieurs systèmes partiels, dont on souhaite connaître *séparément* les caractéristiques. Une conique appartenant à un des systèmes partiels, appartient aussi au système général; elle y sera comprise plusieurs fois si elle résulte de la coïncidence de plusieurs coniques qui sont séparées ordinairement. On voit donc que *la caractéristique μ ou ν d'un système général est égale à la somme des caractéristiques μ ou ν des systèmes partiels, qui résultent d'un cas particulier de la division du grand système, respectivement multipliées par des coefficients entiers et positifs.*

Les parties précédentes de cet article en donnent déjà des exemples. Nous avons trouvé des formules, marquées partout par la lettre c ajoutée aux numéros des formules, où les courbes sont supposées générales d'un certain ordre, sans aucun point double ni de rebroussement, et d'autres, marquées par un a, qui sont applicables lorsque les courbes sont douées de points singuliers. Si l'on emploie dans ce dernier cas une formule (c), la caractéristique trouvée comprendra, outre la caractéristique qui donnerait la formule correspondante (a), le double, le triple ou un multiple de la caractéristique de chacun des systèmes de coniques, dont un ou plusieurs contacts se réduisent à passer par des points singuliers.

Ordinairement les deux caractéristiques μ et ν d'un système partiel ont le même coefficient dans les formules du système général. Alors, comme les nombres λ et ϖ s'expriment linéairement au moyen des caractéristiques, ceux qui appartiennent au système partiel entreront dans ceux du grand système avec le même coefficient. *Si nous appelons r ce coefficient, et si nous désignons par q le nombre de coniques singulières du grand système qui coïncident dans une certaine conique singulière du système partiel, celle-ci a dans le nombre λ ou ϖ de ce dernier système un coefficient qu'on trouve en multipliant par $\frac{q}{r}$ celui qui appartient dans le nombre λ ou ϖ du grand système à chacune des coniques singulières qui y coïncident* (*).

Nous ferons usage de cette règle, applicable à beaucoup de questions, dans les cas où deux courbes données se touchent elles-mêmes.

23. Si nous désignons comme à l'ordinaire par $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ les conditions de toucher deux courbes,

$$N\,(C_{m,n},\ C_{m',n'},\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3)$$

(*) Nous avons suppose que les q coniques singulières du grand système sont d'une même espèce ou qu'elles ont au moins le même coefficient. Si cela n'a pas lieu, on doit prendre séparément celles qui ont un même coefficient.

sera le nombre des coniques qui satisfont à ces deux conditions et à trois autres Z_1, Z_2 et Z_3. Dans le cas où les courbes $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ se touchent en un point θ, deux coniques coïncident, dans chacune de celles qui touchent $C_{m,n}$ au point θ et satisfont en outre aux conditions Z_1, Z_2, Z_3. Donc, si nous désignons par $C_{m,n}\theta$ la condition de toucher la courbe $C_{m,n}$ en un point donné, et par $C_{m,n} - C_{m',n'}$ celles de toucher en des points différents les courbes $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui se touchent elles-mêmes, nous aurons

$$(\mathrm{I})\ \left\{\begin{array}{l} N(C_{m,n},\ C_{m',n'},\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) \\ \quad = 2N(C_{m,n}\theta,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) + N(C_{m,n} - C_{m',n'},\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3). \end{array}\right.$$

En particulier, $C_{m',n'}$ peut se réduire à un point p. Alors l'équation (I) sera remplacée par

$$(\mathrm{II})\ \left\{\begin{array}{l} N(C_{m,n},\ p,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) \\ \quad = 2N(C_{m,n}\theta,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) + N(C_{m,n} - p,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) \end{array}\right.$$

où $C_{m,n} - p$ représente les conditions de couper $C_{m,n}$ en un point donné et de toucher cette courbe en un point non donné. Dans le cas où $C_{m',n'}$ se réduira à une droite l, on aura

$$(\mathrm{III})\ \left\{\begin{array}{l} N(C_{m,n},\ l,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) \\ \quad = 2N(C_{m,n}\theta,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3) + N(C_{m,n} - l,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3). \end{array}\right.$$

Dans le cas où $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ se touchent, le système de coniques $(C_{m,n},\ C_{m',n'},\ Z_1,\ Z_2)$ se divise en deux autres : $(C_{m,n}\theta,\ Z_1,\ Z_2)$ *et* $(C_{m,n} - C_{m',n'},\ Z_1,\ Z_2)$. En remplaçant dans l'équation (I) la condition Z_3 successivement par celle de passer par un point et par celle de toucher une droite, on voit que *chacune des deux caractéristiques du système général est la somme de la caractéristique homologue du premier système partiel multipliée par 2 et de celle du second système.* Le coefficient r dont nous avons parlé dans le n° 22, aura donc pour le premier système la valeur 2, pour le second la valeur 1.

Lorsque les caractéristiques du système général sont connues, il suffit de s'occuper de l'un des systèmes partiels ; nous choisirons le dernier.

24. Les coniques singulières du système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$ sont des limites vers lesquelles tendent certaines coniques singulières du système général $(C_{m,n}, C_{m',n'}, Z_1, Z_2)$, lorsque $C_{m',n'}$ approche d'être tangente à $C_{m,n}$. Les coniques infiniment aplaties du système général dont les limites appartiennent au système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$, doivent, en général,

Ou passer par et être limitées à l'un des deux points d'intersection de $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui tendent à coïncider avec le point de contact,

Ou être contenues sur une des tangentes communes de $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui tendent à coïncider avec la tangente menée par le point de contact donné.

Dans le premier cas elles coïncident deux à deux avec des coniques infiniment aplaties passant par θ et limitées à θ, qui appartiennent toutes au système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$. Chacune de ces coniques singulières représentera donc deux coniques infiniment aplaties du système général, et le nombre q du n° 22 sera égal à 2. Or, selon le n° 23, le nombre r est aussi égal à 2. Il faut donc compter dans le nombre λ du système partiel une de ces coniques infiniment aplaties *autant de fois* que l'on compte chacune des deux qui y coïncident, dans le nombre du système général. Les propositions du n° 12 donneront donc les suivantes :

Dans le nombre λ du système $(C_{m,n}\theta, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$ il faut compter :

Une fois, *toute conique infiniment aplatie joignant le point de contact donné θ à un point d'intersection de C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2} et limitée à ces points ;*

Deux fois, *toute conique infiniment aplatie passant par θ et limitée à θ, tangente à l'une et limitée par l'autre des courbes C_{m_1, n_1} et C_{m_2, n_2}.*

Les coniques infiniment aplaties du système

$$(C_{m,n}, C_{m',n'}, Z_1, Z_2)$$

renfermées dans une des deux tangentes communes à $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ qui coïncident avec la tangente de contact, ne donneront pas seulement des coniques singulières du système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$, mais aussi des coniques singulières du système $(C_{m,n} - C_{m',n'}, Z_1, Z_2)$; car une conique infiniment aplatie renfermée dans la tangente de contact de $C_{m,n}$ et $C_{m',n'}$ peut être regardée ou comme la limite d'une conique ordinaire dont l'une des deux branches touche les deux courbes, ou comme la limite d'une conique ordinaire dont les deux branches touchent respectivement les deux courbes. Dans le premier cas elle appartient au système $(C_{m,n}\theta, Z_1, Z_2)$, dans le second au système $(C_{m,n} - C_{m',n'}, Z_1, Z_2)$. On ne pourra donc conclure combien de fois il faut compter ces coniques singulières dans le λ de chacun des systèmes.

On pourrait de la même manière discuter les coniques à point double; mais lorsque λ est trouvé, le principe de dualité donnera l'expression de ϖ dans les cas qui nous occuperont. Appliqué aux propositions que nous avons trouvées, relatives à deux espèces de coniques infiniment aplaties du système $(C_{m,n}\theta, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$, ce principe donne :

Dans le nombre ϖ du système $(C_{m,n}\theta, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$ il faut compter :

Une fois, *toute conique à point double composée de la tangente à $C_{m,n}$ au point donné θ et d'une tangente commune à C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2};*

Deux fois, *toute conique ayant un point double à un des points où la tangente à $C_{m,n}$ au point θ rencontre l'une des courbes C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2}, et composée de cette tangente et d'une tangente menée par le point double à l'autre des deux courbes.*

25. Maintenant, pour le système

$$(C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1},\ C_{m_2,n_2}),$$

on trouve

$$\lambda = 1\,.\,m_1 m_2 + 2(n_1 m_2 + n_2 m_1) + x m_1 m_2$$

où x est un coefficient encore inconnu, et

$$\varpi = 1\,.\,n_1 n_2 + 2(m_1 n_2 + m_2 n_1) + x n_1 n_2,$$

ou en réduisant

$$\lambda = (1 + x) m_1 m_2 + 2(m_1 n_2 + m_2 n_1),$$
$$\varpi = 2(m_1 n_2 + m_2 n_1) + (1 + x) n_1 n_2.$$

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2) du n° 1 (p. 241), on aura

$$\mu = \mu''' m_1 m_2 + \mu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2,$$
$$\nu = \nu''' m_1 m_2 + \nu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2;$$

où

$$\mu''' = \nu' = \frac{2}{3}(1 + x),\quad \mu'' = \nu'' = 2,\quad \mu' = \nu''' = \frac{1}{3}(1 + x).$$

μ' et ν', μ'' et ν'', μ''' et ν''' sont les caractéristiques des trois systèmes, lorsque C_{m_1,n_1} et C_{m_2,n_2} sont remplacées par des points et par des droites. Par conséquent,

$$\mu'' = N(C_{m,n}\theta,\ p_1,\ p_2,\ l) = \nu',$$

d'où

$$1 + x = 3,$$
$$x = 2\ (*).$$

(*) On pourrait trouver x par la remarque que ce nombre doit être entier, $\geqq 0$ et $\leqq 4$ (n° 24), et que $\mu''' = \frac{2}{3}(1 + x)$ doit être entier.

On trouve, en substituant cette valeur,

$$(8)\left\{\begin{aligned}
&(C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1},\ C_{m_2,n_2}) \equiv [2m_1m_2+2(m_1n_2+m_2n_1)+n_1n_2,\\
&\qquad\qquad m_1m_2+2(m_1n_2+m_2n_1)+2n_1n_2],\\
&(C_{m,n}\theta,\ p_1,\ p_2) \equiv (1,2),\\
&(C_{m,n}\theta,\ p,\ l) \equiv (2,2),\\
&(C_{m,n}\theta,\ l_1,\ l_2) \equiv (2,1).
\end{aligned}\right.$$

26. Comme $x = 2$, nous aurons a ajouter aux théorèmes donnés dans le n° 25 :

Pour le système $(C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1},\ C_{m_2,n_2})$ *il faut compter :*

Dans le nombre λ, deux fois *toute conique infiniment aplatie; tangente à la courbe* $C_{m,n}$ *au point* θ *et limitée par les deux autres courbes;*

Et dans le nombre ϖ, deux fois *toute conique ayant un point double en* θ *et composée de tangentes menées par ce point aux deux autres courbes.*

Ces théorèmes et ceux du n° 24 sont encore vrais lorsque deux des trois courbes ou toutes les trois coincident; ils sont donc applicables à la discussion des systèmes suivants :

$(2C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1})$ *dont les coniques ont avec* $C_{m,n}$ *deux contacts, l'un en un point donné, et avec* C_{m_1,n_1} *un contact simple;*

$(C_{m,n}\theta,\ 2C_{m_1,n_1})$ *dont les coniques ont avec* $C_{m,n}$ *un contact en un point donné, et avec* C_{m_1,n_1} *deux contacts;*

$(3C_{m,n}\theta)$ *dont les coniques ont avec* $C_{m,n}$ *trois contacts, l'un en un point donné.*

Nous ne traiterons que le premier et le dernier de ces trois systèmes, parce que les caractéristiques du deuxième se trouvent sans difficulté au moyen des formules (4).

27. On trouve pour le système $(2\,C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1})$

$$\lambda = 1\,.\,mm_1 + 2\,[n_1(m-1) + (n-2)\,m_1] + 2\,(m-2)\,m_1,$$
$$\varpi = 1\,.\,nn_1 + 2\,[m_1(n-1) + (m-2)\,n_1] + 2\,(n-2)\,n_1.$$

Par conséquent,

$$\mu = \mu'' m_1 + \mu' n_1, \quad \nu = \nu'' m_1 + \nu' n_1$$

où

$$(9\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu' &= 2m + n - 4,\\ \mu'' &= \nu' = 2\,(m + n - 3),\\ \nu'' &= m + 2n - 4. \end{aligned}\right.$$

La signification de μ', μ'' et ν', ν'' s'exprime par les relations

$$(9\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} &(2\,C_{m,n}\theta,\ C_{m_1,n_1}) \equiv (\mu'' m_1 + \mu' n_1,\ \nu'' m_1 + \nu' n_1),\\ &(2\,C_{m,n}\theta,\ p) \equiv (\mu',\ \nu'),\\ &(2\,C_{m,n}\theta,\ l) \equiv (\mu'',\ \nu''). \end{aligned}\right.$$

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on doit remplacer n par $m\,(m-1)$, conséquemment les formules $(9\,a)$ par

$$(9\,c)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu' &= m^2 + m - 4,\\ \mu'' &= \nu' = 2\,(m^2 - 3),\\ \nu'' &= 2m^2 - m - 4. \end{aligned}\right.$$

28. On trouve pour le système $(3\,C_{m,n}\theta)$

$$\lambda = 1\,.\,d + 2\,(n-2)\,(m-3) + 2\,\frac{(m-2)\,(m-3)}{2},$$

$$\varpi = 1\,.\,t + 2\,(m-2)\,(n-3) + 2\,\frac{(n-2)\,(n-3)}{2}.$$

Puis les formules (1) et (2) donnent, après une réduction au moyen des équations de M. Plücker,

$$(10\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu &= (m-2)\,(m+2n-9) + t,\\ \nu &= (n-2)\,(2m+n-9) + d; \end{aligned}\right.$$

$$(10\,b)\qquad (3\,C_{m,n}\theta) \equiv (\mu,\ \nu).$$

Lorsque $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre m, on peut remplacer n par $m(m-1)$, d par o et t par $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$, conséquemment (10 a) par

$$(10\,c)\quad \left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}(m-2)(m^3+4m^2-11m-18), \\ \nu &= (m-2)(m+1)(m^2+m-9). \end{aligned}\right.$$

Pour $m=2$, on trouve

$$\mu=\nu=0,$$

pour $m=3$, $\mu=6$, $\nu=12$ (*).

(*La suite prochainement.*)