BARBIER

LUCAS

Propriétés de la courbe précédente

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 27-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__27_1>

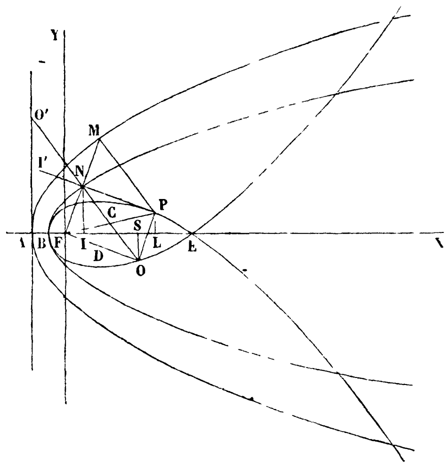
PROPRIÉTÉS DE LA COURBE PRÉCÉDENTE;

PAR MM. BARBIER ET LUCAS,
Astronomes de l'Observatoire de Paris (*).

1. La perpendiculaire NP au milieu du rayon vecteur de la parabole touche la courbe au point P; en effet,

(*) Nous supprimons les deux premières parties de ce travail qui font double emploi avec l'article précédent.

dans le mouvement de l'angle droit FNP, le centre instantané de rotation est le point O, intersection de la perpendiculaire FO élevée sur FM, et de la normale NO au lieu du point N ; la similitude évidente des lieux du point N et du point M fait voir que NO est parallèle à MP;



FO est égal à NP, OP est perpendiculaire sur NP, donc le point P est le point où NP touche son enveloppe.

La parabole BN est donc la podaire de la courbe, le pôle étant au foyer; la podaire de la parabole est sa tangente au sommet; on peut donc dire que la podaire de la podaire de la courbe est une ligne droite.

2. Le rayon de lumière FP se réfléchirait sur la courbe dans la direction MP prolongée, c'est-à-dire dans la direction de la normale à la parabole au point N; il résulte de cette remarque que la caustique par réflexion de la courbe est la développée de la parabole. Le point lumineux est au foyer de la parabole.

3. L'ordonnée NI et la droite NP sont également incli-

nées sur la normale NO à la parabole BN. Il résulte de là que la courbe est la caustique par réflexion de la parabole BN pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe de la parabole.

Cette courbe est étudiée à ce titre dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hôpital.

4. Le point O est le milieu du rayon de courbure de la parabole BN au point N.

Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une proposition connue : Si une courbe réfléchit des rayons parallèles, la projection du milieu du rayon de courbure de cette courbe sur le rayon réfléchi correspondant donne un point de la caustique.

5. Soit L la projection du point P sur l'axe AX et I la projection du point N sur le même axe; on a $BL = 3\,BI$.

Pour démontrer cette proposition, remarquons que si l'on prend sur le prolongement NO' de la normale à la parabole BN une longueur NO' égale à la moitié du rayon de courbure au point N, le point O' est un point de la directrice AO' de cette parabole.

De l'égalité de NO et de NO' résulte celle des projections AI et IS de ces deux longueurs; on voit donc que FL est égal à $3\,FI + AF$ ou $3\,FI + 2\,BF$; à ces deux quantités égales il suffit d'ajouter BF pour avoir l'égalité

$$BL = 3\,(FI + BF)$$

qui devient évidemment celle que nous voulions démontrer.

6. L'arc de courbe BP a pour longueur le chemin INP parcouru par le rayon de lumière entre l'axe de la parabole et la caustique.

Cette proposition revient à la suivante : Si l'on prend, sur le prolongement de PN, $NI' = NI$, le lieu du point I' est une développante de la courbe BP. Il suffit de faire voir que ce lieu de I' est normal à PI'.

Cette dernière proposition peut être démontrée ainsi : Appelons $N'I''$ une position de NI' infiniment voisine de NI'. L'élément de parabole NN' a des projections égales sur NI et sur NP, on verra facilement d'après cela que la projection de I'' sur NI' doit tomber au point I pour que $N'I''$ puisse être regardé comme égal à sa projection sur NI'. Donc le lieu de I' est normal à PI'.

7. Les tangentes aux points où l'axe FY rencontre la courbe BP se coupent sous un angle de 60 degrés ; nous avons déjà dit que les tangentes au point double se coupent sous le même angle de 60 degrés. Ces propositions sont des cas particuliers de la suivante :

Si l'on mène une droite par le point F, elle coupe la courbe en trois points ; les tangentes en ces trois points forment un triangle équilatéral.

Cette élégante proposition est elle-même comprise dans le théorème suivant :

Les tangentes à la courbe BP aux extrémités de deux rayons vecteurs font un angle égal aux $\frac{2}{3}$ de l'angle de ces rayons vecteurs.

Plus généralement, les tangentes aux extrémités de deux rayons vecteurs d'une courbe $\rho \cos^p \frac{\omega}{p} = a$ se coupent sous un angle égal à la fraction $\frac{p-1}{p}$ de l'angle de ces rayons vecteurs.

8. La polaire réciproque de la courbe par rapport à une circonférence dont le centre est au foyer F est une cardioïde. Cela résulte de cette proposition connue : La polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle

est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de la courbe, le pôle étant le centre du cercle.

9. Si l'on considère toutes les courbes obtenues en faisant varier le paramètre de la parabole, on obtient une série de courbes dont les trajectoires orthogonales sont des courbes égales aux premières. Il en est de même pour les trajectoires coupant chacune des courbes de la série sous un angle constant.

10. Remarquons enfin que la courbe étudiée rentre dans la famille des courbes dont l'équation est $\rho^n = a^n \cos n\omega$. Ces courbes se substituent les unes aux autres par la transformation $\rho' = \rho^n$, $\omega' = n\omega$, et on sait que cette transformation n'altère point les angles; on peut donc déduire la plupart des propriétés précédentes des propriétés correspondantes de la droite, du cercle ou de la parabole, courbes de la famille considérée.