Nouvelles annales de mathématiques

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 266-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__266_1>

QUESTION D'EXAMEN;

PAR M. A. P.,
Élève de l'École Polytechnique.

Les six normales menées par un point à une surface du second degré se trouvent sur un cône du second degré.

Cet énoncé constitue un théorème, car cinq droites suffisent pour déterminer un cône du second degré.

Remarque. — Le diamètre passant par le pied d'une normale à la surface est le conjugué du plan tangent en ce point. On en déduit cet énoncé nouveau :

Les six normales à une surface du second degré, *menées par un point, se trouvent sur le cône des droites issues de ce point et telles qu'elles rencontrent le diamètre conjugué aux plans qui sont perpendiculaires à ces droites.*

Le cône est du second degré, car il coupe un plan principal de la surface suivant une courbe du second degré.

Les constructions employées en Géométrie descriptive pour trouver les traces d'une droite nous fournissent les éléments de la démonstration qui s'appuie du reste sur les principes généraux de l'homographie et sur les deux lemmes suivants :

Lemme I. — *La projection d'un diamètre sur un plan principal et la trace du plan diamétral conjugué sont deux diamètres conjugués de la section principale.*

Lemme II. — *Dans le plan d'une conique, le lieu des intersections d'un diamètre avec la droite perpendiculaire à son conjugué, issue d'un point fixe, est une hyperbole équilatère passant par le centre de la conique et par le point fixe et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique proposée.*

Je prends pour plans de projection deux plans principaux de la surface ; soient A, l'axe situé sur la ligne de terre ; B, le second axe horizontal ; C', l'axe vertical ; M, m, m' le point fixe et ses projections ; L, l et l' une droite et ses projections. Cette droite passe par le point M ; elle rencontre le diamètre conjugué du plan P, qui lui est perpendiculaire. Soient p et p' les traces de ce plan, qui sont respectivement perpendiculaires à l et à l'. D, d, d' représentent le diamètre conjugué de P et ses projections. D'après le lemme I, d est conjugué de p dans le plan horizontal, et d' conjugué de p' dans le plan vertical. Les droites D et L se rencontrent par hypothèse en N, qui se projette en n et n' intersections de (l et d) et de (l' et d'). D'après le lemme II, le point n décrit dans le plan horizontal, une hyperbole équilatère S passant par le point m et par le centre de la surface, ayant ses asymptotes parallèles à la ligne de terre A et au second axe B. Le lieu du point n' est une hyperbole analogue S', située dans le plan vertical. La ligne nn' coupe la ligne de terre en ν et lui est perpendiculaire en ce point. Les deux faisceaux l et $n\nu$, issus tous deux de deux points de l'hyperbole S (ces points sont m et le point à l'infini dans la direction B), se coupant en n sur cette hyperbole, sont homographiques. De même, l' et $n'\nu$ sont homographiques, νn et $\nu n'$ le sont entre eux ; donc les faisceaux l et l' sont homographiques. La trace α de la ligne L sur le plan horizontal s'obtient en prolongeant l' jusqu'à la ligne de terre en α' et élevant la perpendiculaire $\alpha'\alpha$ jusqu'à sa rencontre avec l'. Les faisceaux l' et $\alpha'\alpha$ sont homographiques. Donc $\alpha\alpha'$ et l' forment deux faisceaux homographiques. Leur point de rencontre décrit donc une conique. Le cône auquel appartient la droite L est donc du second degré; il contient les six normales, ce qui démontre le théorème.