NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PH. GILBERT

Note sur les fonctions de Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 263-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__263_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE SUR LES FONCTIONS DE STURM;

PAR M. PH. GILBERT,
Professeur à l'Université de Louvain.

Soit

$$X = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

une équation de degré n; soient a, b,..., l ses racines, et

$$\left\{\begin{array}{l} R_0 = \alpha_0 x^{n-1} + \beta_0 x^{n-2} + \gamma_0 x^{n-3} + \ldots + \lambda_0, \\ R_1 = \alpha_1 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \gamma_1 x^{n-3} + \ldots + \lambda_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-1} = \alpha_{n-1} x^{n-1} + \beta_{n-1} x^{n-2} + \gamma_{n-1} x^{n-3} + \ldots + \lambda_{n-1} \end{array}\right.$$

n fonctions de degré $n - 1$ se déduisant toutes de la première R_0, laquelle n'est autre chose que la dérivée X_1 de X, par la suite d'équations

$$\begin{aligned} R_1 &= xR_0 - \alpha_0 X, \\ R_2 &= xR_1 - \alpha_1 X, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-1} &= xR_{n-2} - \alpha_{n-2} X. \end{aligned}$$

Toutes ces fonctions R_i se calculeront donc avec une grande rapidité, et l'on a d'ailleurs

$$R_i = \sum \frac{a^i}{x - a} X.$$

Cela posé :

1° On aura en général

$$\alpha_i = \sum a^i.$$

En d'autres termes, *les coefficients* α_0, α_1,..., α_{n-1} *sont* *les sommes des puissances semblables des degrés* o, 1,... $n-1$ *des racines de l'équation proposée.*

2° En appelant $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ les fonctions de Sturm, ou plutôt celles de M. Sylvester, qui n'en diffèrent que par des facteurs constants positifs, nous aurons

$$X_1 = R_0 = \alpha_0 x^{n-1} + \beta_0 x^{n-2} + \ldots + \lambda_0,$$

$$X_2 = \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0 x^{n-2} + \ldots + \lambda_0 \\ \alpha_1, & \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \lambda_1 \end{vmatrix},$$

$$X_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0 x^{n-3} + \ldots + \lambda_0 \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 x^{n-3} + \ldots + \lambda_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 x^{n-3} + \ldots + \lambda_2 \end{vmatrix}, \ldots$$

et enfin

$$X = \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0, \ldots, & \lambda_0 \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \ldots, & \lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1}, & \beta_{n-1}, & \gamma_{n-1}, \ldots, & \lambda_{u-1} \end{vmatrix}.$$

Ces formules fournissent un moyen facile à retenir, et très-rapide dès que l'on a un peu l'habitude du calcul numérique des déterminants, pour obtenir les fonctions sturmiennes par de simples multiplications. Elles permettent même, aussitôt que les fonctions R_i sont calculées, d'écrire immédiatement le terme affecté d'une puissance quelconque de x, dans l'une quelconque des fonctions X_i, indépendamment de tous les autres termes. Les formes diverses données par MM. Sylvester, Cayley, Brioschi, Hermite se déduisent sans peine des formules précédentes, ainsi que les expressions des facteurs par lesquels il faut multiplier les fonctions X_i pour passer aux fonctions de Sturm.

3° *Le dernier terme* H *de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation* $X = 0$, ou le produit de ces carrés, se déduit aussi du calcul des fonctions R_i, puisque l'on sait (*Journal de Liouville*, t. VII, p. 368) que ce dernier terme ne diffère pas de la dernière fonction X_n de M. Sylvester. On a donc

$$H = \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0, \ldots, & \lambda_0 \\ \alpha_1, & \beta_1, \ldots, & \lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1}, & \beta_{n-1}, \ldots, & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Appliquons cette méthode à l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

il vient immédiatement

$$R_0 = 3x^2 + 2px + q,$$
$$R_1 = -px^2 - 2qx - 3r,$$
$$R_2 = (p^2 - 2q)x^2 + (pq - 3r)x + pr,$$

d'où

$$H = \begin{vmatrix} 3, & -p, & p^2 - 2q \\ 2p, & -2q, & pq - 3r \\ q, & -3r, & pr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3, & p, & 2q \\ 2p, & 2q, & pq + 3r \\ q, & 3r, & 2pr \end{vmatrix}$$
$$= 18pqr - 27r^2 + p^2q^2 + 4p^3r - 4q^3.$$

De même, l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

nous donnera

$$R_0 = 4x^3 + 3px^2 + 2qx + r,$$
$$R_1 = -px^3 - 2qx^2 - 3rx - 4s,$$
$$R_2 = (p^2 - 2q)x^3 + (pq - 3r)x^2 + (pr - 4s)x + ps,$$
$$R_3 = [(pq - 3r) - p(p^2 - 2q)]x^3 + [pr - 4s - q(p^2 - 2q)]x^2$$
$$+ [ps - r(p^2 - 2q)]x - s(p^2 - 2q).$$

En formant le déterminant H et opérant les réductions bien connues, il vient de suite

$$H = -\begin{vmatrix} 4, & p, & 2q, & 3r \\ 3p, & 2q, & pq + 3r, & 2pr + 4s \\ 2q, & 3r, & 2pr + 4s, & 3ps + qr \\ r, & 4s, & 3ps, & 2qs \end{vmatrix};$$

il reste donc simplement à développer ce déterminant.

Ce procédé pour calculer le dernier terme de l'équation aux carrés des différences semble offrir sur les autres (SERRET, *Algèbre supérieure*, 2e édit., p. 30 et 452) l'avantage d'être facile à retenir, de s'appliquer directement aux équations numériques, et de ne point exiger que l'on forme d'abord ce terme, pour toutes les équations de degré inférieur à n, avant d'arriver à l'équation de degré n.

(*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 12 février 1866.)