NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H.-G. ZEUTHEN

# Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 5 (1866), p. 241-262

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__241_0>

# NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES (*);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

## I. — *Exposé de la méthode.*

1. Nous adopterons dans ce travail les notations de M. Chasles, et nous supposerons connus les principes de sa méthode, tels qu'ils ont été exposés ici même dans le numéro de mai (p. 193).

Nous désignerons par $\lambda$ le nombre des coniques d'un système $(\mu, \nu)$ qui se réduisent à une droite double limitée à deux points, et par $\varpi$ le nombre des coniques de ce système qui ont un point double ou qui se composent de l'ensemble de deux droites. On aura donc (*voir* p. 196)

$$\lambda = 2\mu - \nu,$$
$$\varpi = 2\nu - \mu,$$

d'où l'on déduit pour les caractéristiques d'un système les expressions suivantes :

$$\mu = \frac{1}{3}(2\lambda + \varpi), \tag{1}$$

$$\nu = \frac{1}{3}(2\varpi + \lambda). \tag{2}$$

(*) Ce Mémoire est extrait d'une thèse écrite en danois et inttiulée : *Nouvelles contributions à la théorie des systèmes de coniques*. In-8 de 98 pages. Copenhague, 1865. L'auteur a bien voulu, à notre demande, traduire la partie de cette thèse qui contient ses recherches personnelles.

La détermination des caractéristiques d'un système dépend donc de celle des nombres $\lambda$ et $\varpi$ des *coniques singulières* qu'il contient.

2. Pour déterminer les nombres $\lambda$ et $\varpi$, il s'agit de trouver : 1° sur quelles droites sont situées les coniques infiniment aplaties, et quels points sont doubles dans les autres coniques exceptionnelles; 2° quelles coniques singulières de la première espèce sont situées sur chacune des droites trouvées, et quelles coniques singulières de la seconde espèce ont à chacun des points trouvés un point double; 3° *combien de fois chacune des coniques singulières qu'on a trouvées est comptée dans les nombres* $\lambda$ et $\varpi$.

Les deux premières questions demandent la détermination d'une droite et de deux points situés sur cette droite, ou d'un point et de deux droites passant par ce point. Les quatre conditions du système suffisent pour y répondre.

La dernière question, où l'on cherche à déterminer le coefficient avec lequel chaque conique singulière entre dans $\lambda$ ou $\varpi$, offre de plus grandes difficultés. Nous commencerons par les systèmes simples dont les caractéristiques sont bien connues, pour nous préparer à vaincre les difficultés auxquelles donnent lieu les systèmes plus compliqués.

## II. — *Détermination des caractéristiques des cinq systèmes élémentaires.*

3. On peut déterminer ces caractéristiques par notre méthode, en sachant seulement qu'il n'y a qu'une seule conique qui passe par cinq points donnés.

Nous désignerons par $p$ la condition de passer par un point donné, et par $l$ celle de toucher une droite; les systèmes élémentaires seront donc

$$\begin{aligned}
(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4) &\equiv (\mu',\ \nu')\\
(p_1,\ p_2,\ p_3,\ l) &\equiv (\mu'',\ \nu'')\\
(p_1,\ p_2,\ l_1,\ l_2) &\equiv (\mu''',\ \nu''')\\
(p,\ l_1,\ l_2,\ l_3) &\equiv (\mu^{\text{IV}},\ \nu^{\text{IV}})\\
(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4) &\equiv (\mu^{\text{V}},\ \nu^{\text{V}})
\end{aligned}$$

$\lambda'$, $\varpi'$, $\lambda''$, $\varpi''$, etc., désigneront respectivement les valeurs de $\lambda$ et de $\varpi$ relatives à ces divers systèmes.

4. Le système $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ ne contient, en général, aucune conique infiniment aplatie; $\lambda'$ sera donc égal à o. On peut faire passer trois couples de droites par quatre points donnés, et le système contient, par conséquent, trois coniques à point double. On aura donc $\varpi' = 3x$, $x$ étant un nombre entier et positif. Les formules (1) et (2) du n° 1 donnent

$$\mu' = \frac{1}{3}(2\lambda' + \varpi') = x, \quad \nu' = \frac{1}{3}(2\varpi' + \lambda') = 2x.$$

Or on sait que $\mu' = 1$, puisque $\mu'$ est le nombre des coniques qui passent par cinq points donnés. Donc aussi $x = 1$ et $\nu' = 2$, et

$$(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4) \equiv (1,\ 2).$$

5. Le système $(p_1, p_2, p_3, l)$ ne contient aucune conique infiniment aplatie; donc $\lambda'' = 0$.

Si la droite $p_1\, p_2$ rencontre la droite $l$ au point $o$, les deux droites $p_1\, p_2$ et $op_3$ composeront une conique à point double qui satisfait aux conditions du système. Il y en a deux autres qui résultent d'une permutation des points donnés. Par conséquent

$$\varpi'' = 3y.$$

$y$ étant un coefficient encore inconnu.

La substitution des valeurs trouvées de $\lambda''$ et $\varpi''$ dans les formules (1) et (2) donne

$$\mu'' = y, \quad \nu'' = 2y.$$

Or $\mu''$ est le nombre des coniques qui passent par quatre points donnés, et touchent une droite donnée, soit $N(p_1, p_2, p_3, p_4, l)$. Mais nous avons exprimé par $\nu'$ ce dernier nombre. Donc $\mu'' = \nu' = 2$, et, par conséquent, $y = 2$, $\nu'' = 4$, et

$$(p_1, p_2, p_3, l) \equiv (2, 4).$$

6. Au système $(p_1, p_2, l_1, l_2)$ appartient une conique infiniment aplatie, savoir la droite qui joint les deux points donnés, et limitée aux points où elle rencontre les droites données, et une conique à point double composée des droites qui joignent aux points donnés le point de rencontre des droites données. Donc

$$\lambda''' = 1 \,.\, z, \quad \varpi''' = 1 \,.\, u,$$

$z$ et $u$ étant les coefficients qui indiquent combien de fois les coniques singulières entrent respectivement dans $\lambda'''$ et dans $\varpi'''$ (*).

En transformant le système actuel au moyen du principe de dualité, on revient à un système de même espèce. On aura donc $\lambda''' = \varpi'''$, et par conséquent $z = u$.

Les formules (1) et (2) donnent maintenant

$$\mu''' = z = u = \nu'''.$$

Or

$$\mu''' = N(p_1, p_2, p_3, l_1, l_2) = \nu'' = 4.$$

Donc

$$z = u = 4, \quad \nu''' = 4, \quad \text{et} \quad (p_1, p_2, l_1, l_2) \equiv (4, 4).$$

---

(*) Les équations $\lambda''' = z$ et $\varpi''' = u$ n'apprennent rien sur $\lambda'''$ et $\varpi'''$. Nous ne les écrivons ici que parce que nous aurons besoin des coefficients $z$ et $u$ indépendamment de cette question.

7. Au système $(p, l_1, l_2, l_3)$ appartient la conique infiniment aplatie située sur la droite qui joint le point $p$ au point de rencontre des droites $l_1$ et $l_2$, et limitée à ce dernier point et au point où elle rencontre la droite $l_3$. Il y aura dans le système encore deux coniques aplaties analogues, mais aucune conique à point double. Donc

$$\lambda^{\text{IV}} = 3\rho, \quad \varpi^{\text{IV}} = 0.$$

Au moyen des formules (1) et (2) on trouve donc

$$\mu^{\text{IV}} = 2\rho, \quad \nu^{\text{IV}} = \rho.$$

Or

$$\mu^{\text{IV}} = \text{N}(p_1, p_2, l_1, l_2, l_3) = \nu''' = 4;$$

par conséquent

$$\rho = 2, \quad \nu^{\text{IV}} = 2,$$

et

$$(p, l_1, l_2, l_3) \equiv (4, 2).$$

8. Au système $(l_1, l_2, l_3, l_4)$ appartiennent trois coniques infiniment aplaties qui joignent deux des points où les quatre droites données se rencontrent deux à deux; mais ce système ne contient aucune conique à point double. Donc

$$\lambda^{\text{V}} = 3.s, \quad \varpi^{\text{V}} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\mu^{\text{V}} = 2s, \quad \nu^{\text{V}} = s.$$

Or

$$\mu^{\text{V}} = \text{N}(p, l_1, l_2, l_3, l_4) = \nu^{\text{IV}} = 2;$$

donc

$$s = 1, \quad \nu^{\text{V}} = 1, \quad \text{et} \quad (l_1, l_2, l_3, l_4) \equiv (2, 1).$$

Les caractéristiques des deux premiers systèmes élémentaires étant trouvées, celles des deux derniers auraient pu être obtenues au moyen du principe de dualité.

9. Nous avons trouvé pour les coefficients $x$, $y$, $z$, $u$, $v$, $s$ les valeurs

$$x = s = 1, \quad y = v = 2, \quad z = u = 4,$$

ce qui donne lieu aux propositions suivantes dont nous allons bientôt faire usage.

On doit compter :

Dans les nombres $\lambda$ qui correspondent aux systèmes élémentaires : *une fois*, toute conique infiniment aplatie, joignant deux points où quatre droites données se rencontrent deux à deux, et limitée à ces points; *deux fois*, toute conique infiniment aplatie passant par un point donné et par le point de rencontre de deux droites données, et limitée à celui-ci et au point où elle rencontre une troisième droite donnée; *quatre fois*, toute conique infiniment aplatie passant par deux points donnés, et limitée aux points où elle rencontre deux droites données;

Et dans les nombres $\varpi$ qui correspondent aux mêmes systèmes : *une fois*, toute conique singulière composée de deux droites qui joignent deux à deux quatre points donnés; *deux fois*, toute conique ayant un point double au point d'intersection d'une droite donnée et de la droite qui joint deux points donnés, et composée de celle-ci et de la droite qui joint le point double à un troisième point donné; *quatre fois*, toute conique ayant un point double au point d'intersection de deux droites données, et composée des droites qui joignent ce point d'intersection à deux points donnés.

## III. — *Détermination des caractéristiques d'un système de conique qui touchent quatre courbes données.*

10. On peut regarder le mouvement d'une conique variable qui touche continuellement une courbe donnée

à volonté, comme composé d'une suite de rotations autour des points successifs de contact, ou comme une suite de glissements, sur les tangentes en ces points. On voit par là que les coefficients des coniques singulières du système actuel, qui ne dépendent que de la variation instantanée d'une conique qui satisfait sans cesse aux conditions données, sont les mêmes que ceux des coniques singulières des systèmes élémentaires. Les théorèmes du n° 9 donnent donc lieu aux suivants :

*On doit compter :*

*Dans le nombre* $\lambda$ *relatif à un système de coniques qui touchent quatre courbes données :* une seule fois, *toute conique infiniment aplatie joignant deux points où les quatre courbes se rencontrent deux à deux et limitée à ces points ;* deux fois, *toute conique infiniment aplatie touchant une courbe donnée, passant par un point de rencontre de deux autres des courbes données et limitée à ce point et à la quatrième courbe* (*) ; quatre fois, *toute conique infiniment aplatie touchant deux courbes données et limitée par les deux autres ;*

*Et dans le nombre* $\varpi$ *relatif au même système :* une fois, *toute conique singulière composée d'un couple de droites dont l'une touche les deux courbes données, l'autre les deux autres ;* deux fois, *toute conique ayant un point double à l'un des points où une courbe donnée rencontre une tangente commune à deux autres, et composée de cette droite et d'une tangente par le point double à la quatrième courbe ;* quatre fois, *toute conique ayant un point double à un point de rencontre de deux courbes données, et composée de deux tangentes menées par ce point aux deux autres courbes.*

---

(*) C'est-à-dire à l'un des points où elle rencontre une quatrième courbe.

11. Dans ce qui suit, nous désignons par $C_{m,n}$ la condition de toucher une courbe de l'ordre $m$ et de la classe $n$ ayant $d$ points doubles, $d'$ points de rebroussement, $t$ tangentes doubles, et $t'$ tangentes d'inflexion (*). Nous appellerons aussi la courbe elle-même $C_{m,n}$. Les différentes courbes seront distinguées par des indices. Le système qui nous occupe sera donc représenté par

$$(C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2}, C_{m_3,n_3}, C_{m_4,n_4}).$$

Pour trouver les nombres de coniques singulières qui appartiennent aux différentes classes nommées dans le

---

(*) Ces nombres qui sont entiers et positifs satisfont encore à trois équations indépendantes l'une de l'autre qu'on peut écrire de la manière suivante :

(I) $$n = m(m-1) - 2d - 3d',$$

(II) $$m = n(n-1) - 2t - 3t',$$

(III) $$2(d-t) = (m-n)(m+n-9).$$

On peut remplacer une de ces trois équations par la suivante qui en résulte

(IV) $$d' - t' = 3(m-n).$$

Au lieu des équations (III) et (IV), on emploie souvent

$$t' = 3m(m-2) - 6d - 8d'$$

ou

$$d' = 3n(n-2) - 6t - 8t',$$

qui, avec (I) et (II) fournit le système d'équations qui portent le nom de M. Plücker (*System der analytischen Geometrie*, p. 241-270; Berlin, 1835). Les équations (III) et (IV), dont l'usage nous sera plus commode que celui des deux dernières équations de M. Plücker sont déduites de son système d'équations.

Dans ces équations, un point multiple de l'ordre $r$ compte pour $\frac{r(r-1)}{2}$ points doubles, une tangente multiple de l'ordre $r$ pour $\frac{r(r-1)}{2}$ tangentes doubles.

Dans la discussion actuelle, il ne sera question que du degré $m$ et de la classe $n$ des courbes. C'est pour les discussions suivantes que nous avons introduit les autres nombres.

n° 10, il faut se rappeler que deux courbes des ordres $m_r$ et $m_s$ ont $m_r . m_s$ points de rencontre, et que deux courbes des classes $n_r$ et $n_s$ ont $n_r . n_s$ tangentes communes.

Le nombre des coniques infiniment aplaties de la première espèce (nommée dans le n° 10) sera donc

$$m_1 m_2 . m_3 m_4 + m_1 m_3 . m_2 m_4 + m_1 m_4 . m_2 m_3 = 3 . m_1 m_2 m_3 m_4 .$$

Celui des coniques infiniment aplaties de la deuxième espèce, sera

$$\begin{aligned} & m_1 m_2 . n_3 m_4 + m_1 m_2 . n_4 . m_3 + m_1 m_3 . n_2 . m_4 + m_1 m_3 . n_4 . m_2 \\ & \quad + m_1 m_4 . n_2 . m_3 + m_1 m_4 . n_3 . m_2 + m_2 m_3 . n_1 m_4 \\ & \quad + m_2 m_3 . n_4 . m_1 + m_2 m_4 . n_1 . m_3 + m_2 m_4 . n_3 . m_1 \\ & \quad + m_3 m_4 . n_1 . m_2 + m_3 m_4 . n_2 \ m_1 \\ & = 3 \Sigma m_1 m_2 m_3 n_4 . \end{aligned}$$

Celui des coniques infiniment aplaties de la troisième espèce sera

$$\begin{aligned} & n_1 n_2 . m_3 . m_4 + n_1 n_3 . m_2 . m_4 + n_1 n_4 . m_2 . m_3 \\ & \quad + n_2 n_3 . m_1 . m_4 + n_2 n_4 . m_1 m_2 + n_3 n_4 . m_1 . m_2 = \Sigma m_1 m_2 n_3 n_4 . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lambda = 3 m_1 m_2 m_3 m_4 + 6 \Sigma m_1 m_2 m_3 n_4 + 4 \Sigma m_1 m_2 n_3 n_4 .$$

De même on trouve, au moyen des théorèmes du n° 10 sur les coniques à point double,

$$\varpi = 3 n_1 n_2 n_3 n_4 + 6 \Sigma m_1 n_2 n_3 n_4 + 4 \Sigma m_1 m_2 n_3 n_4 .$$

La valeur de $\varpi$ résulte de celle de $\lambda$ par une permutation des lettres $m$ et $n$, ce qui est aussi une conséquence du principe de la dualité. Car en transformant par ce principe le système actuel, on trouve un nouveau système de coniques qui touchent les quatre courbes homologues aux courbes données.

En substituant les valeurs trouvées de $\lambda$ et de $\varpi$ dans les formules (1) et (2) du n° 1, on trouve

$$(3a)\quad \left\{\begin{aligned} \mu &= 2m_1 m_2 m_3 m_4 + 4\Sigma m_1 m_2 m_3 n_4 \\ &\quad + 4\Sigma m_1 m_2 n_3 n_4 + 2\Sigma m_1 n_2 n_3 n_4 + n_1 n_2 n_3 n_4, \\ \nu &= m_1 m_2 m_3 m_4 + 2\Sigma m_1 m_2 m_3 n_4 \\ &\quad + 4\Sigma m_1 m_2 n_3 n_4 + 4\Sigma m_1 n_2 n_3 n_4 + 2n_1 n_2 n_3 n_4. \end{aligned}\right.$$

Ces valeurs de $\mu$ et $\nu$ satisfont donc à la relation (*)

$$(3b)\qquad (C_{m_1,n_1},\ C_{m_2,n_2},\ C_{m_3,n_3},\ C_{m_4,n_4}) \equiv (\mu, \nu).$$

Les formules $(3a)$ sont encore vraies lorsque l'une des courbes données se réduit à une droite ou à un point, $m$ et $n$ prenant respectivement les valeurs de 1 et de 0 ou de 0 et de 1.

Lorsque $C_{m,n}$ est une *courbe générale de l'ordre* $m$, c'est-à-dire une courbe de cet ordre dépourvue de points doubles et de points de rebroussement, $n$ prend, selon la formule I de M. Plücker (**), la valeur $m(m-1)$.

Ces substitutions donnent lieu à beaucoup de corollaires.

IV. — *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont un contact double avec une courbe donnée et des contacts simples avec deux autres.*

**12.** Désignons par $2C_{m,n}$ la condition d'un contact

(*) Les formules (3) résultent de la formule générale et du corollaire du théorème LXXV, donnés par M. Chasles dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 1er août 1864.

(**) *Voir* l'avant-dernière note

double avec $C_{m,n}$, alors le système sera représenté par $(2C_{m,n}, C_{m_1,n_1}, C_{m_2,n_2})$.

Les théorèmes du n° 10 ont encore lieu dans ce cas-ci, où deux des quatre courbes coïncident. Seulement il faut regarder les points et les tangentes doubles de $C_{m,n}$ comme des points communs et des tangentes communes aux deux courbes qui y coïncident, et l'on doit se rappeler qu'une tangente de $C_{m,n}$ rencontre encore la même courbe en $m - 2$ points, et qu'on peut, par un point de la courbe, y mener $n - 2$ tangentes, outre celle qui la touche en ce point.

Cependant le système actuel contient encore d'autres coniques singulières. Lorsqu'une conique infiniment aplatie est tangente à la courbe $C_{m,n}$, quatre points d'intersection coïncident au point de contact, dont deux appartiennent à chacune des deux branches coïncidentes de cette conique singulière; mais les deux points d'intersection de l'une des branches sont séparés de ceux de l'autre, et la courbe $C_{m,n}$ n'est en général touchée que par l'une. Un seul cas fait une exception, celui où la tangente de $C_{m,n}$ qui renferme la conique infiniment aplatie est une tangente d'inflexion. Alors la conique singulière peut être regardée comme la limite d'une conique dont les deux branches qui tendent à coïncider, ont chacune avec $C_{m,n}$ un contact et une intersection qui tendent à coïncider au point d'inflexion (*). On voit donc que toute conique infiniment aplatie située sur une tangente d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitée par les deux autres courbes données appartient au système. Nous supposerons que le nombre de ces coniques singulières dans l'expression de $\lambda$

(*) Si la conique est reelle, $C_{m,n}$, avant l'inflexion, coupe l'une des branches de cette conique et touche l'autre; puis, après l'inflexion, elle touche la première et coupe la seconde.

est multiplié par le coefficient $x$ que nous déterminerons plus tard (*).

Il n'est pas nécessaire de chercher séparément les coniques à point double du système, puisque le principe de dualité peut servir à déterminer $\varpi$, si l'expression de $\lambda$ est connue; car le système qu'on trouve en transformant par ce principe le système actuel sera de la même espèce. Seulement les courbes que doivent toucher les coniques seront remplacées par leurs réciproques. On trouve donc $\varpi$ qui est le $\lambda$ du nouveau système, par une permutation dans l'expression de $\lambda$ des lettres $m$ et $n$, $d$ et $t$, $d'$ et $t'$.

Pour plus de clarté, nous écrirons séparément les différentes parties de $\lambda$ avec leurs coefficients respectifs :

$$\begin{aligned}
\lambda = {} & 1\,(dm_1 m_2 + mm_1 . mm_2) \\
& + 2.[dn_1 m_2 + dn_2 m_1 + mm_1 .(n-2) m_2 \\
& \qquad + mm_1 . n_2 (m-1) + mm_2 (n-2) m_1 \\
& \qquad + mm_2 . n_1 (m-1) + m_1 m_2 n (m-2)] \\
& + 4.\Big[tm_1 m_2 + nn_1 (m-2) m_2 \\
& \qquad + nn_2 (m-2) m_1 + n_1 n_2 \frac{m(m-1)}{2}\Big] \\
& + x.t' m_1 m_2.
\end{aligned}$$

---

(*) On doit chercher avec soin s'il n'y aurait pas, dans les systèmes dont on s'occupe, plusieurs coniques singulières autres que celles qui se présentent par elles-mêmes. Dans le système actuel, on pourrait croire en trouver renfermées dans les tangentes aux points de rebroussement de $C_{m,n}$ et limitées par $C_{m_1,n_1}$ et $C_{m_2,n_2}$; mais alors, selon le principe de dualité, les coniques ayant des points doubles aux points d'inflexion de $C_{m,n}$ auraient avec elles un contact double, ce qui n'a pas lieu évidemment.

Du reste, quand on ne sait pas décider si une certaine espèce de coniques singulières appartient à un certain système, on doit introduire dans l'expression de $\lambda$ ou de $\varpi$ leur nombre multiplié par un coefficient indéterminé qui doit être entier et positif.

En faisant la permutation indiquée, on trouve

$$\begin{aligned}\varpi = {} & 1(t.n_1 n_2 + nn_1.nn_2)\\ & + 2.[tm_1 n_2 + tm_2 n_1 + nn_1(m-2) n_2 + nn_1 m_2(n-1)\\ & \qquad + nn_2(m-2)n_1 + nn_2 m_1(n-1) + n_1 n_2 m(n-2)]\\ & + 4.\left[dn_1 n_2 + mm_1(n-2) n_2\right.\\ & \qquad \left. + mm_2(n-2) n_1 + m_1 m_2 \frac{n(n-1)}{2}\right]\\ & + x.d' n_1 n_2.\end{aligned}$$

Les trois premiers termes de $\varpi$ représentent les coniques à point double mentionnées dans le n° **10**. Le dernier terme représente les coniques qui ont des points doubles aux points de rebroussement de $C_{m_1,n}$, et qui sont composées chacune d'une tangente à $C_{m_1,n_1}$ et d'une tangente à $C_{m_2,n_2}$. Cette nouvelle espèce de coniques à point double, correspond à la nouvelle espèce de coniques aplaties que le système actuel contient. En réduisant les expressions trouvées, on aura

$$\begin{aligned}\lambda = {} & m_1 m_2 (m^2 + 6mn - 8m - 4n + d + 4t + x.t')\\ & + 2(m_1 n_2 + m_2 n_1)(m_2 + 2mn - m - 4n + d)\\ & + 2n_1 n_2.m(m-1),\\ \varpi = {} & n_1 n_2 (n^2 + 6mn - 8n - 4m + t + 4d + x.d')\\ & + 2(m_1 n_2 + m_2 n_1)(n_2 + 2mn - n - 4m + t)\\ & + 2m_1 m_2 n(n-1).\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2) du n° **1**, on trouve

$$\begin{aligned}\mu &= \mu''' m_1 m_2 + \mu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2,\\ \nu &= \nu''' m_1 m_2 + \nu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2,\end{aligned}$$

où

$$\mu' = \frac{1}{3}(4m^2 + 6mn + n^2 - 8m - 8n + t + 4d + xd'),$$

$$\mu'' = \frac{2}{3}(2m^2 + 6mn + n^2 - 6m - 9n + t + 2d),$$

$$\mu''' = \frac{2}{3}(m^2 + 6mn + n^2 - 8m - 5n + 4t + xt' + d),$$

$$\nu' = \frac{2}{3}(m^2 + 6mn + n^2 - 5m - 8n + t + 4d + xd'),$$

$$\nu'' = \frac{2}{3}(m^2 + 6mn + 2n^2 - 9m - 6n + 2t + d),$$

$$\nu''' = \frac{1}{3}(m^2 + 6mn + 4n^2 - 8m - 8n + 4t + xt' + d).$$

**13.** Pour avoir la signification de $\mu'$, $\mu''$, $\mu'''$, $\nu'$, $\nu''$ et $\nu'''$, remplaçons successivement $C_{m_1, n_1}$ et $C_{m_2, n_2}$ par deux points, par un point et une droite et par deux droites.

$C_{m_1, n_1}$ et $C_{m_2, n_2}$ se réduisant à deux points, on a

$$m_1 = m_2 = 0 \quad \text{et} \quad n_1 = n_2 = 1,$$

et, par conséquent,

$$\mu = \mu', \quad \nu = \nu'.$$

$C_{m_1, n_1}$ se réduisant à un point, $C_{m_2, n_2}$ à une droite, on a

$$m_1 = n_2 = 0 \quad \text{et} \quad n_1 = m_2 = 1,$$

et, par conséquent,

$$\mu = \mu'', \quad \nu = \nu''.$$

$C_{m_1, n_1}$ et $C_{m_2, n_2}$ se réduisant à deux droites, on a

$$m_1 = m_2 = 1 \quad \text{et} \quad n_1 = n_2 = 0$$

et, par conséquent,

$$\mu = \mu''', \quad \nu = \nu''',$$

$\mu'$, $\mu''$, etc. sont donc les caractéristiques des systèmes de coniques qui, satisfaisant à la condition d'un double contact, satisfont en outre aux conditions élémentaires de passer par des points et de toucher des droites. M. Chasles appelle aussi ces systèmes *élémentaires*.

Cette circonstance sert à la détermination du coefficient $x$, car

$$\nu' = \mathrm{N}(2\mathrm{C}_{m,n}, p_1, p_2, l) = \mu'',$$
$$\nu'' = \mathrm{N}(2\mathrm{C}_{m,n}, p_1, l_1, l_2) = \mu'''.$$

La première de ces équations s'écrit

$$\begin{aligned} &m^2 + 6mn + n^2 - 5m - 8n + t + 4d + xd' \\ &= 2m^2 + 6mn + n^2 - 6m - 9n + t + 2d \end{aligned}$$

ou

$$xd' = m(m-1) - n - 2d.$$

Or, selon l'équation (I) de M. Plücker (p. 248),

$$3d' = m(m-1) - n - 2d.$$

Par conséquent,

$$x = 3.$$

L'équation $\nu'' = \mu'''$ donnerait le même résultat.

14. En substituant $x = 3$ dans les expressions trouvées dans le n° 12 pour $\mu'$, $\mu''$ etc., et réduisant au moyen des formules de M. Plücker, on trouve

$$(4a)\quad \left\{\begin{aligned} \mu' &= 2m(m+n-3) + t, \\ \mu'' = \nu' &= 2m(m+2n-5) + 2t, \\ \mu''' = \nu'' &= 2n(2m+n-5) + 2d, \\ \nu''' &= 2n(m+n-3) + d. \end{aligned}\right.$$

Pour donner à ces expressions la forme la plus simple, nous y avons gardé les quatre nombres $m$, $n$, $d$ et $t$ dont chacun dépend des trois autres.

Les valeurs $(4a)$ satisfont aux relations suivantes :

$$(4b)\,(*)\left\{\begin{aligned}
&(2C_{m,n},\ C_{m_1,n_1},\ C_{m_2,n_2}) \equiv [(\mu''' m_1 m_2 + \mu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \mu' n_1 n_2,\\
&\qquad\qquad \nu''' m_1 m_2 + \nu''(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \nu' n_1 n_2)],\\
&(2C_{m,n},\ p_1,\ p_2) \equiv (\mu', \nu'),\\
&(2C_{m,n},\ p,\ l) \equiv (\mu'', \nu''),\\
&(2C_{m,n},\ l_1,\ l_2) \equiv (\mu''', \nu''').
\end{aligned}\right.$$

Dans le cas où $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre $m$, $d = d' = 0$, et, selon les formules de M. Plücker,

$$n = m(m-1),\quad t = \frac{1}{2} m(m-2)(m^2-9),\quad t' = 3m(m-2),$$

les formules $(4a)$ seront remplacées par

$$(4c)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mu' = \frac{1}{2} m(m-1)(m^2+3m-6),\\
&\mu'' = \nu'' = m(m-1)(m^2+3m-8),\\
&\mu''' = \nu'' = 2m(m-1)(m^2+m-5),\\
&\nu''' = 2m(m-1)(m^2-3).
\end{aligned}\right.$$

$m = 1$ donne $\mu' = \mu'' = \mu''' = \nu' = \nu'' = \nu''' = 0$;
$m = 2$ donne $\mu' = \mu'' = \mu''' = \nu' = \nu'' = \nu''' = 4$.

15. Dans le n° 13 nous avons trouvé pour le coefficient $x$ la valeur 3; ce qui donne lieu aux théorèmes suivants :

*On doit compter dans le nombre $\lambda$ relatif à un système de coniques, qui ont un double contact avec une*

---

(*) M. Cremona a résolu le même problème. Le savant géomètre y emploie, à côté d'autres moyens, le nombre $\lambda$ du système $(2C_{m,n}, p_1, p_2)$. La différence de ses résultats et des miens n'est qn'apparente, les uns pouvant se déduire des autres au moyen des équations de M. Plücker (*voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 7 novembre 1864).

*courbe* $C_{m,n}$ *et des contacts simples avec les deux autres courbes* $C_{m_1,n_1}$ *et* $C_{m_2,n_2}$:

Trois fois, *toute conique infiniment aplatie située sur une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$ *et limitée par les deux autres courbes ;*

*Et dans le nombre* $\varpi$ *relatif au même système* ·

Trois fois, *toute conique ayant un point double confondu avec un point de rebroussement de* $C_{m,n}$, *et composée de deux tangentes menées par ce point aux deux autres courbes.*

V. — *Détermination des caractéristiques des autres systèmes de coniques qui ont avec deux courbes données des contacts du premier ordre, simples, doubles ou multiples.*

16. Nous aurons à trouver les caractéristiques des systèmes suivants :

$(2C_{m,n}, 2C_{m_1,n_1})$ *dont les coniques ont des doubles contacts avec les courbes* $C_{m,n}$ *et* $C_{m_1,n_1}$ (*) ;

$(3C_{m,n}, C_{m_1,n_1})$ *dont les coniques ont un contact triple avec* $C_{m,n}$, *et un contact simple avec* $C_{m_1,n_1}$ ;

$(4C_{m,n})$ *dont les coniques ont avec* $C_{m,n}$ *un contact quadruple.*

Ces systèmes ne contiennent de coniques irrégulières que celles qui sont nommées dans les n^os 10 et 15, avec la seule différence qu'à présent plusieurs courbes ont coïncidé. Pour déterminer les nombres $\lambda$ et $\mu$, nous n'aurons donc qu'à employer les théorèmes contenus dans ces numéros.

---

(*) MM. Chasles et Cremona ont donné le moyen d'exprimer les caractéristiques de ce système au moyen de celles des systèmes *élémentaires* de coniques qui ont avec $C_{m,n}$ et $C_{m_1,n_1}$ séparément un double contact (*Comptes rendus*, 22 août et 7 novembre 1864).

17. On trouve pour le système $(2C_{m,n}, 2C_{m_1,n_1})$

$$\lambda = 1\left[dd_1 + \frac{mm_1(mm_1-1)}{2}\right]$$
$$+ 2[dn_1(m_1-2) + d_1n(m-2) + mm_1(n-2)(m_1-1)$$
$$+ mm_1(n_1-2)(m-1)]$$
$$+ 4\left[t\frac{m_1(m_1-2)}{2} + t_1\frac{m(m-1)}{2} + nn_1(m-2)(m_1-2)\right]$$
$$+ 3\left[t'\frac{m_1(m_1-1)}{2} + t'_1\frac{m(m-1)}{2}\right],$$

$$\varpi = 1\left[tt_1 + \frac{nn_1(nn_1-1)}{2}\right]$$
$$+ 2[tm_1(n_1-2) + t_1m(n-2) + nn_1(m-2)(n_1-1)$$
$$+ nn_1(m_1-2)(n-1)]$$
$$+ 4\left[d\frac{n_1(n_1-1)}{2} + d_1\frac{n(n-1)}{2} + mm_1(n-2)(n_1-2)\right]$$
$$+ 3\left[d'\frac{n_1(n_1-1)}{2} + d'_1\frac{n(n-1)}{2}\right].$$

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2), on trouve après une réduction assez longue (*) :

$$(5a)\left\{\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2}n(n-1)n_1(n_1-1)\\ &\quad -\frac{1}{2}n[(n-1)-m(m-1)][n_1(n_1-1)-m_1(m_1-1)]\\ &\quad +[m(m+2n-5)+t][m_1(m_1+2n_1-5)+t_1],\\ \nu &= \frac{1}{2}m(m-1)m_1(m_1-1)\\ &\quad -\frac{1}{2}[m(m-1)-n(n-1)][m_1(m_1-1)-n_1(n_1-1)]\\ &\quad +[n(n+2m-5)+d][n_1(n_1+2m_1-5)+d_1].\end{aligned}\right.$$

(*) Cette réduction et d'autres qui suivent se font au moyen des équations de M. Plücker (page 248) et ont pour but de donner aux expres-

La signification de ces valeurs de $\mu$ et de $\nu$ s'exprime par le symbole suivant,

$$(5\,b) \qquad (2C_{m,n},\ 2C_{m_1,n_1}) \equiv (\mu, \nu).$$

Si $C_{m,n}$ et $C_{m_1,n_1}$ sont des courbes générales des ordres $m$ et $m_1$, on sait que

$$n = m(m-1), \quad d = 0, \quad t = \frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9),$$

$$n_1 = m_1(m_1-1), \quad d_1 = 1, \quad t_1 = \frac{1}{2}m_1(m_1-2)(m_1^2-9);$$

les formules $(5a)$ seront donc remplacées par les suivantes :

$$(5c)\quad \left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4}m(m-1)m_1(m_1-1) \\ &\quad \times [m(m+3)m_1(m_1+3) - 2m(3m+13) \\ &\qquad - 2m_1(3m_1+13) + 58], \\ \nu &= \frac{1}{2}m(m-1)m_1(m_1-1) \\ &\quad \times [(m^2+3m-8)(m_1^2+3m_1-8) \\ &\qquad - 2(2m-3)(2m_1-3)+1]. \end{aligned}\right.$$

Pour $m = 1$ ou $m_1 = 1$, on trouve $\mu = \nu = 0$.

Pour $m = m_1 = 2$, on trouve $\mu = \nu = 6$ (*).

18. Pour déterminer les nombres $\lambda$ et $\varpi$ du système $(3C_{m,n}, C_{m_1,n_1})$, on doit se rappeler qu'une tangente double rencontre encore la courbe $C_{m,n}$ en $m-4$ points, une

---

sions trouvées la forme qui me semble la plus simple et la plus commode. Comme elles ne contiennent rien de nouveau, je me borne à indiquer leurs résultats. On peut voir la justesse de ces résultats en substituant les expressions trouvées dans les équations

$$2\mu - \nu = \lambda \quad \text{et} \quad 2\nu - \mu = \varpi.$$

(*) Dans ce cas particulier, le système se divise en trois systèmes partiels dont chacun a ses caractéristiques égales à 2. (Poncelet, *Traité des Propriétés projectives*, nos 427 et suiv., dans la nouvelle édition ; *voir* aussi Chasles, *Traité des Sections coniques*, no 497).

tangente d'inflexion en $m-3$ points, et qu'on peut, par un point double de $C_{m,n}$, faire passer $n-4$ tangentes, et par un point de rebroussement $n-3$ tangentes, outre celles qui ont ces points pour points de contact. On trouve donc

$$\begin{aligned}\lambda = {} & 1 . dmm_1 \\ & + 2.[d(n-4)m_1 + dn_1(m-2) + mm_1(n-2)(m-3)] \\ & + 4.\left[t(m-4)m_1 + nn_1\frac{(m-2)(m-3)}{2}\right] \\ & + 3.t'(m-3)m_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varpi = {} & 1 . tnn_1 \\ & + 2.[t(m-4)n_1 + tm_1(n-2) + nn_1(m-2)(n-3)] \\ & + 4.\left[d(n-4)n_1 + mm_1\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right] \\ & + 3d'(n-3)n_1.\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans les formules (1) et (2), on trouve, après réduction,

$$\mu = \mu''.m_1 + \mu'.n_1,$$
$$\nu = \nu''.m_1 + \nu'.n_1,$$

où

$$(6a)\left\{\begin{aligned}\mu' = {} & \frac{1}{3}[2m^3 + 6m^2n - n^3 - 30m^2 - 18mn \\ & + 13n^2 + 84m - 42n \\ & + (6m + 3n - 26)t], \\ \mu'' = \nu' = {} & \frac{1}{6}\{(m+n)[-(m+n)^2 - 7(m+n) + 48] \\ & + 4mn[3(m+n) - 13] \\ & + 2(d+t)[3(m+n) - 20]\}, \\ \nu'' = {} & \frac{1}{3}[-m^3 + 6mn^2 + 2n^3 + 13m^2 - 18mn \\ & - 30n^2 - 42m + 84n \\ & + (3m + 6n - 26)d].\end{aligned}\right.$$

En posant d'abord $m_1 = 0$, $n_1 = 1$, et ensuite $m_1 = 1$, $n_1 = 0$, on remplace la courbe successivement par un point et par une droite. Dans le premier cas, les caractéristiques du système deviennent $\mu'$ et $\nu'$, dans le second $\mu''$ et $\nu''$. On aura donc

$$(6b) \quad \left\{ \begin{array}{l} (3C_{m,n},\ C_{m_1,n_1}) \equiv (\mu'' m_1 + \mu' n_1,\quad \nu'' m_1 + \nu' n_1) \\ (3C_{m,n},\ p) \equiv (\mu',\ \nu'), \\ (3C_{m,n},\ l) \equiv (\mu'',\ \nu''). \end{array} \right.$$

Si $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre $m$, les forformules $(6a)$ se réduiront, par la substitution de $n = m(m-1)$, $d = 0$, $t = \frac{1}{2} m(m-2)(m^2-9)$, aux suivantes :

$$(6c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu' = \frac{1}{6} m(m-2)(m^4 + 5m^3 - 17m^2 - 49m + 108), \\ \mu'' = \nu' = \frac{1}{3} m(m-2)(m^4 + 5m^3 - 23m^2 - 25m + 90), \\ \nu'' = \frac{1}{3} m(m-2)(2m^4 + 4m^3 - 28m^2 - 11m + 63). \end{array} \right.$$

Pour $m = 2$ on aura $\mu' = \mu'' = \nu' = \nu'' = 0$.

Pour $m = 3$ on aura $\mu' = 12$, $\mu'' = \nu' = 24$, $\nu'' = 48$ (*).

19. On trouve pour le système $(4C_{m,n})$,

$$\lambda = 1 . \frac{d(d-1)}{2} + 2 . d(n-4)(m-4) + 4 . t \frac{(m-4)(m-5)}{2} + 3 . t' \frac{(m-3)(m-4)}{2},$$

$$\varpi = 1 . \frac{t(t-1)}{2} + 2 . t(m-4)(n-4) + 4 d \frac{(n-4)(n-5)}{2} + 3 . d' \frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

---

(*) Dans ce cas, le système se divise en trois autres où $\mu' = 4$, $\mu'' = \nu' = 8$ et $\nu'' = 16$ (*voir* un Mémoire de M. Hesse dans le *Journal de Crelle*, t. XXXVI, p. 143 et suiv.).

d'où

$$
(7a)\quad \begin{cases}
\mu = \frac{1}{6}\{2(m-3)(m-4)(n^2-m-n) \\
\qquad + (n-3)(n-4)(m^2-m-n) \\
\qquad + 4t(m^2-11m+28) + 2d(n^2-11n+28) \\
\qquad + (2d+t)[4(n-4)(m-4)-1] + 2d^2 + t^2\}, \\
\nu = \frac{1}{6}\{(m-3)(m-4)(n^2-m-n) \\
\qquad + 2(n-3)(n-4)(m^2-m-n) \\
\qquad + 2t(m^2-11m+28) + 4d(n^2-11n+28) \\
\qquad + (d+2t)[4(n-4)(m-4)-1] + d^2 + 2t^2\}.
\end{cases}
$$

et

$$
(7b)\qquad (4C_{m,n}) \equiv (\mu, \nu)
$$

Si $C_{m,n}$ est une courbe générale de l'ordre $m$,

$$
(7c)\quad \begin{cases}
\mu = \frac{1}{24} m(m-2)(m-3)(m^5 + 9m^4 - 15m^3 \\
\qquad\qquad - 225m^2 + 140m + 1050), \\
\nu = \frac{1}{12} m(m-2)(m-3)(m^5 + 9m^4 - 27m^3 \\
\qquad\qquad - 153m^2 + 170m + 546).
\end{cases}
$$

Pour $m = 2$ ou $m = 3$, on aura $\mu = \nu = 0$.
Pour $m = 4$, on aura $\mu = 126$, $\nu = 252$ (*).

(*) Dans ce cas, le système se divise en soixante-trois autres (*voir* un Mémoire de M. Hesse dans le *Journal de Crelle*, t. XLIX, p. 279). Les coniques d'un système partiel, dont les caractéristiques sont 2 et 4, appartiennent à un même *réseau* du premier ordre, ce qui donne lieu à plusieurs analogies avec les droites tangentes à une conique (ce que j'ai montré dans le *Journal de Mathématiques de Copenhague*, p. 154; 1863).

(*La suite prochainement.*)