NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 226-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__226_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 656

(voir 2e série, tome III, page 274);

Démontrer géométriquement que la division de la circonférence en sept parties égales se ramène à la trisection de l'angle dont la tangente est égale à $3\sqrt{3}$.

(MATTHEW COLLINS.)

On sait que l'inscription de l'heptagone se ramène à la résolution de deux équations, l'une du deuxième degré, l'autre du troisième. Or, la résolution d'une équation du troisième degré (qui a ses trois racines réelles) peut toujours se ramener à la trisection d'un angle. Ce sont là sans doute les considérations qui ont conduit M. M. Collins à la construction suivante, qu'il nous a communiquée, et dont la vérification n'offre aucune difficulté.

Soient AOA' et BOB' deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre; prenez du côté du point A', $OO' = \frac{1}{6} OA'$; soit AE le sixième de la circonférence; menez EC parallèle à AA' et qui rencontre BB' en b; du point O' comme centre décrivez l'arc bFb' (le point b' est sur BB'). Soit bD le tiers de cet arc. En prolongeant jusqu'à la rencontre du premier cercle en Z une perpendiculaire abaissée du point D sur AA', l'arc AZ sera le septième de la circonférence proposée.

P.

Question 742

(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 429);

PAR M. L. LACAUCHIE.

Le lieu des foyers des paraboles conjuguées à un triangle donné est la circonférence des neuf points de ce triangle. (J. GRIFFITHS.)

Soit ABC le triangle; α, β, γ les milieux de ses côtés; les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ toucheront les paraboles conjuguées an triangle ABC. Le lieu des foyers est donc le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$, c'est-à-dire le cercle des neuf points du triangle proposé.

Note. — Autres démonstrations par MM. Bauquenne, F. Richard, Elliot, Hatté, Niébylowski, Muzeau, Delaunay et de Viaris, Marmier, Viant, Rondot.

Question 743

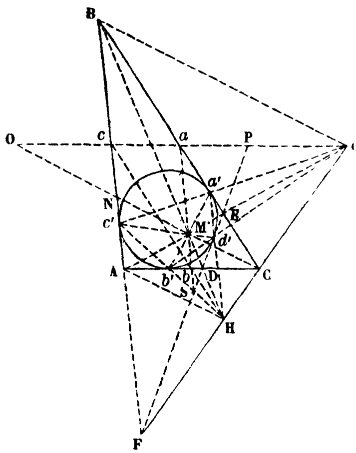
(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 429);

PAR M. L. LACAUCHIE.

Soient a', b', c' les points auxquels les côtés d'un triangle ABC *sont touchés par le cercle inscrit; par chacun des sommets* A, B, C *on mène une droite parallèle à l'axe d'homologie des triangles* ABC, $a'b'c'$, *et on désigne par x, y, z les points de leur intersection avec les côtés* BC, CA, AB, *et par p le pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle inscrit* $(a'b'c')$ *sur l'axe d'homologie des triangles* ABC, xyz : *démontrer que la circonférence des neuf points du triangle* ABC *touche la circonférence inscrite* $(a'b'c')$ *au point p.*
(J. GRIFFITHS.)

Il est aisé de ramener cette construction à celle qui fait l'objet de la Note insérée par M. Gerono, p. 221 (1865).

Les droites AH, BG, CM ne sont autres que les droites Ax, By, Cz de l'énoncé précédent. En effet, soient α,



β, γ les trois points qui déterminent l'axe d'homologie des triangles ABC et $a'b'c'$; on sait que α est le conjugué harmonique de a' par rapport à C et B, donc les droites $\gamma\alpha$, $\gamma a'$, γC, γB forment un faisceau harmonique. Or M est le milieu de CN, donc CM est parallèle à $\alpha\beta\gamma$. Il en est de même des droites AH et BG.

Le point N n'est autre chose que le point z; or H, G, M sont respectivement les milieux des droites Ax, By, Cz, donc xy coupe AB au point F par où passe la droite HG; de même yz coupe BC en E, et zx coupe CA en D, donc FP est l'axe d'homologie des triangles ABC et xyz. La Note démontre que cette droite est la tangente commune au cercle inscrit et au cercle des neuf points; la proposition est donc démontrée.

Une construction analogue s'applique aux cercles exinscrits.

Question 746

(voir 2e série, t. III, p. 430);

PAR M. MERCE BUSCO.

Démontrer la relation

$$m = \left\{ \frac{\sin\frac{\pi}{m}\cdot\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{3\pi}{m}\cdots\sin\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{3\pi}{2m}\cdot\sin\frac{5\pi}{2m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}} \right\}^2,$$

dans laquelle m est un nombre entier pair.

(E. CATALAN.)

En posant $\sin a = z$, on a (*voir*, par exemple, la *Trigonométrie* de M. Serret), pour des valeurs paires de l'entier positif m,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos ma &= 1 - \frac{m.m}{1.2}z^2 + \ldots \\ &\pm \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots m\ldots 2}{1.2\ldots m}z^m, \\ \frac{\sin ma}{m\sin a\cos a} &= 1 - \frac{(m+2)(m-2)}{1.2}z^2 + \ldots \\ &\pm \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots(m+2)(m-2)\ldots 2}{1.2\ldots m}z^{m-2}; \end{aligned}\right.$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\cos ma}{\cos a} &= 1 - \frac{(m+1)(m-1)}{1.2}z^2 + \ldots \\ &\pm \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}{1.2\ldots(m-1)}z^{m-1}, \\ \frac{\sin ma}{\sin a} &= 1 - \frac{(m+1)(m-1)}{1.2.3}z^2 + \ldots \\ &\pm \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}{1.2.3\ldots m}z^{m-1}. \end{aligned}\right.$$

Le rapport des coefficients de z^m et de z^{m-2} dans les deux polynômes (1), c'est-à-dire m, représente le rapport renversé des produits respectifs des racines de ces polynômes; et comme ces racines sont respectivement

$$\pm \sin\frac{\pi}{2m}, \quad \pm \sin\frac{3\pi}{2m}, \ldots,$$

$$\pm \sin\frac{2\pi}{2m}, \quad \pm \sin\frac{4\pi}{2m}, \ldots,$$

on en conclut la relation de M. Catalan qu'on obtient encore, dans le cas de m impair, au moyen des formules (2).

En ayant égard aux relations ordinaires entre les coefficients et les racines d'une équation, on peut trouver d'autres formules, par exemple :

$$\frac{m^2}{2} = \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{\pi}{2m}} + \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{3\pi}{2m}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{(m-1)\pi}{2m}},$$

pour m pair;

$$\frac{m^2-1}{2} = \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{\pi}{2m}} + \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{3\pi}{2m}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2 \cdot \frac{(m-2)\pi}{2m}},$$

pour m impair.

Note. — M. de Virieu a démontré la même formule.

Question 750

(voir page 48);

PAR M. MARQUES BRAGA,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Si l'on fait la projection gauche d'une figure plane sur un tableau plan et si ensuite on fait tourner l'un *des deux plans autour de leur intersection commune, les deux figures demeureront toujours les projections gauches l'une de l'autre.* (ABEL TRANSON.)

Il suffit de démontrer le théorème pour une droite et une conique, projections gauches l'une de l'autre. La conique donnée passe par les points A', B', l, γ et par l'intersection de la droite donnée avec L. (Nous adoptons les notations de M. Transon; *voir* t. IV, p. 385.) Or, si on fait la projection gauche après avoir fait tourner le tableau d'un certain angle, aucun de ces cinq points ne changera; la conique ne changera donc pas.

Autre démonstration par M. Viant. — O étant un point du plan primitif et α, β les points où OA et OB rencontrent la droite L, le point O' se trouve à la rencontre de αA' avec βB'. Or quand le plan du tableau tourne autour de L, ces droites ont chacune deux points fixes dans le plan mobile, savoir α et A', β et B'. Le point O' reste donc toujours la projection gauche du point O.