NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL MOËSSARD

Concours d'admission à l'École impériale polytechnique en 1865

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 21-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__21_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE EN 1865.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE,

Par M. Paul MOËSSARD.

On donne dans un plan une parabole. On considère une circonférence passant par le foyer de cette parabole. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le centre de la circonférence pour que cette courbe ait successivement avec cette parabole quatre points réels communs, quatre points imaginaires communs, deux points réels et deux points imaginaires communs. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare les deux premières régions de la troisième.

Je prends pour origine des coordonnées le foyer de la parabole fixe; pour axe des x l'axe de cette parabole, et pour axe des y une perpendiculaire élevée au foyer.

Soit $2p$ le paramètre de la parabole; son équation sera

$$y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

L'équation d'un cercle ayant pour centre le point dont les coordonnées sont a et b, et passant à l'origine, est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par l'intersection des deux courbes est donc

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \lambda\left[y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)\right] = 0,$$

ou bien

$$x^2 + y^2(1+\lambda) - 2(a+p\lambda)x - 2by - p^2\lambda = 0.$$

Je vais exprimer que cette équation représente un système de deux droites qui seront alors les sécantes communes aux deux courbes. Pour cela j'exprime que le centre de cette conique est sur la courbe. J'écris les équations du centre, et ce que devient l'équation de la conique quand on tient compte des équations du centre; j'ai ainsi

$$x - a - p\lambda = 0,$$
$$y(1+\lambda) - b = 0,$$
$$x(a+p\lambda) + by + \lambda p^2 = 0.$$

Il faut éliminer x et y entre ces équations; en remplaçant x et y par leurs valeurs dans la troisième, j'ai

$$(a+p\lambda)^2(1+\lambda) + b^2 + \lambda p^2(1+\lambda) = 0,$$

équation dont les trois racines me donneront des systèmes de sécantes communes.

Cherchons la condition pour que les racines de cette équation soient toutes trois réelles.

Je l'ordonne :

$$p^2\lambda^3 + 2p(p+a)\lambda^2 + (p+a)^2\lambda + a^2 + b^2 = 0.$$

Je fais maintenant disparaître le terme en λ^2. Pour cela je diminue toutes les racines de cette équation du tiers de la somme de ses racines, c'est-à-dire de la quantité toujours réelle $-\frac{2p(p+a)}{3p^2}$ ou $-\frac{2(p+a)}{3p}$.

Je remplace donc λ par $\mu - \frac{2(p+a)}{3p}$.

Soit $f(\lambda) = 0$ la première équation. J'y fais $\lambda = \mu + h$, et j'ai

$$f(\mu + h) = f(h) + \mu f'(h) + \mu^2 \frac{f''(h)}{1.2.} + \mu^3 \frac{f'''(h)}{1.2.3}.$$

Je calcule ces différents coefficients :

$$f(h) = -\frac{8(p+a)^3}{27p} + \frac{8(p+a)^3}{9p} - \frac{2(p+a)^3}{3p} + a^2 + b^2$$

$$= \frac{-2(p+a)^3 + 27p(a^2+b^2)}{27p},$$

$$f'(h) = -\frac{(p+a)^2}{3},$$

$$f''(h) = 0,$$

et

$$f'''(h) = +6p^2.$$

L'équation en μ sera donc

$$p^2\mu^3 - \frac{(p+a)^2}{3}\mu - \frac{2(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2)}{27p} = 0.$$

Formons la condition de réalité des racines de cette équation ; c'est

$$-4 \cdot \frac{(p+a)^6}{27 \cdot p^6} + 27\frac{[2(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2)]^2}{27^2p^6} < 0,$$

ou

$$-4(p+a)^6 + [2(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2)]^2 < 0,$$

ou bien encore

$$[4(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2)][-27p(a^2+b^2)] < 0.$$

Le second facteur est toujours négatif (*); donc la

(*) Plusieurs élèves ont remarqué qu'en égalant ce facteur à zéro, on obtient le foyer qui peut être considéré comme faisant *en quelque sorte* partie du lieu, en regardant ce point comme un cercle de rayon nul et doublement tangent à la parabole. Mais la suppression de ce facteur commun ne peut avoir ici aucune importance. P.

condition se réduit à

$$(1) \qquad 4(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2) > 0.$$

Si l'on avait

$$4(p+a)^3 - 27p(a^2+b^2) = 0,$$

la parabole et le cercle seraient tangents, puisque, l'équation en λ ayant deux racines égales, deux des systèmes de sécantes communes se réduiraient à un seul. Si donc nous construisons la courbe

$$4(p+x)^3 - 27p(x^2+y^2) = 0,$$

elle séparera les deux régions du plan où doit se trouver le centre pour que les racines de l'équation en λ soient toutes réelles, ou qu'il n'y en ait qu'une de réelle.

Je résous l'équation par rapport à y :

$$y^2 = \frac{4(p+x)^3 - 27px^2}{27p} = \frac{4x^3 - 15px^2 + 12p^2x + 4p^3}{27p}.$$

Cherchons à décomposer le numérateur en facteurs du premier degré, si faire se peut.

Si j'égale à zéro la dérivée de ce numérateur,

$$2x^2 - 5px + 2p^2 = 0,$$

les racines de cette équation sont $2p$ et $\frac{p}{2}$.

Or, $2p$ annule le numérateur de la valeur de y^2; donc $x - 2p$ est facteur double de ce numérateur, et, en effectuant la division, on trouve comme troisième facteur $4x+p$.

Donc

$$y^2 = \frac{(4x+p)(x-2p)^2}{27p}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des x.

Pour x inférieur à $-\frac{p}{4}$, y^2 est négatif et y imaginaire; pour $x=-\frac{p}{4}$, $y=0$, et en ce point (C) la tangente est parallèle à l'axe des y.

y augmente, et, pour $x=0$, $y^2=\frac{4}{27}p^2$, et comme $OA=p$, je pose $OB=\frac{2OA}{3\sqrt{3}}$.

Puis, pour $x=2p$, $y=0$, et la courbe a un point double; soit $OD=2p$.

Les (coefficients angulaires des) tangentes en ce point sont

$$\pm \lim \frac{y}{x-2p} \quad \text{pour} \quad x=2p,$$

c'est-à-dire $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Puis, x devenant infini, y devient aussi infini.

Comme, dans l'équation (de la courbe), les termes du plus haut degré se réduisent à x^3, les branches infinies tendent à devenir parallèles à l'axe des y. Du reste, leurs asymptotes sont transportées à l'infini; ce sont des branches paraboliques.

Voyons maintenant quelles sont les propriétés de cette courbe et des régions qu'elle sépare.

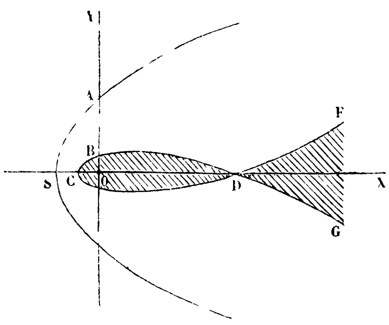
Nous savons que quand le centre du cercle sera sur cette courbe, le cercle sera tangent à la parabole. Pour le point C, il est manifeste que le cercle n'aura avec la courbe que deux points d'intersection réunis en un seul; donc tous les autres points des branches CD de la courbe seront centres de cercles tangents à la parabole et ne la coupant pas d'ailleurs. En D le cercle sera bitangent à la parabole, et, pour tous les autres points des branches infinies partant du point D, les cercles seront tangents à la parabole et la couperont en deux autres points distincts.

Les points de cette courbe sont donc tels, que la longueur d'une normale menée de l'un d'eux à la parabole est égale à la distance de ce point au foyer, et en appelant la longueur de cette normale la distance du point à la parabole, cette courbe est le lieu des points également distants d'une parabole et de son foyer.

Voyons maintenant pour quelles parties du plan les racines de l'équation en λ seront réelles toutes trois.

Pour le point O, $x = 0$, $y = 0$, la condition (1) est satisfaite; donc, pour ce point et pour tous ceux qui sont dans la région hachée, les trois racines de l'équation en λ sont réelles. Pour tous les points du plan compris dans cette région, les cercles auront donc quatre points réels ou quatre points imaginaires communs avec la courbe, et pour tous les points situés en dehors, les cercles auront seulement deux points réels communs avec la parabole.

Distinguons maintenant les parties de cette région qui correspondent à quatre points réels ou à quatre points imaginaires communs. Pour le point O, le cercle en question n'a aucun point réel commun avec la parabole; il en



est donc de même pour tous les points compris dans la boucle CD. Au contraire, les points compris entre les deux branches infinies donneront des cercles ayant quatre points réels communs avec la parabole.

Donc, en résumé :

1° Pour les points compris dans la boucle CD, les cercles ne rencontreront pas la parabole.

2° Pour les points situés sur la boucle même, les cercles seront tangents et ne la couperont pas autrement.

3° Pour tous les points compris dans l'espace laissé en blanc, les cercles ne rencontreront la parabole qu'en deux points.

4° Pour les points situés sur les branches de courbe ED, DG, les cercles seront tangents à la parabole et la couperont en deux autres points.

5° Enfin, pour les points compris entre ces deux branches, dans l'angle curviligne EDG, les cercles couperont les paraboles en quatre points.

Note du Rédacteur. — Cette copie a mérité la note 19. Plusieurs autres élèves, sans avoir aussi bien fait dans l'ensemble, ont noté plusieurs choses dignes de remarque. Quelques-uns ont employé les coordonnées polaires, qui conduisaient plus immédiatement à une equation simple. Quant aux propriétés de la courbe, partie vague et mal limitée de la question, on en trouvera quelques-unes dans le travail suivant. P.