CHASLES

Propriétés d'un système de coniques (μ, ν)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 204-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__204_0>

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE CONIQUES (μ, ν).

EXTRAIT D'UN MÉMOIRE DE M. CHASLES (*).

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

I. *Le lieu des pôles d'une droite est une courbe d'ordre* ν.

Corollaire. — Si la droite est à l'infini, le théorème prend cet énoncé :

Le lieu des centres des coniques est une courbe d'ordre ν.

II. Dans le cas où les coniques du système (μ, ν) passent toutes par deux points, en satisfaisant à deux autres conditions, *le lieu des pôles de la droite qui joint ces points est d'ordre* $\frac{\nu}{2}$.

Corollaire. — Et si les deux points sont à l'infini, *le lieu des centres des coniques du système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* $\frac{\nu}{2}$.

III. 1° *Si de deux points* Q, Q' *on mène des tangentes à chaque conique d'un système* (μ, ν), *les points d'intersection de ces tangentes sont sur une courbe d'ordre* 3ν, *qui a deux points multiples d'ordre* ν, *en* Q *et* Q'.

2° *Si les coniques du système* (μ, ν) *sont toutes tangentes à la droite* QQ', *la courbe, lieu des points de*

(*) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 15 février 1864.

rencontre des deux tangentes menées de Q et Q′ à chaque conique, est d'ordre $\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)$, *et a deux points multiples d'ordre* $\frac{\mu}{2}$ *en Q et Q′.*

Corollaires. — **Si Q et Q′ sont imaginaires, à l'infini, sur un cercle, les points d'intersection des tangentes sont les foyers des coniques. Donc :**

1° *Le lieu des foyers des coniques d'un système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* 3ν, *qui a deux points multiples d'ordre* ν, *à l'infini, sur un cercle.*

2° *Le lieu des foyers d'un système* (μ, ν) *de paraboles est une courbe d'ordre* $\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)$ *qui a deux points multiples d'ordre* $\frac{\mu}{2}$ *imaginaires, à l'infini, sur un cercle.*

IV. *Le lieu des points de concours des tangentes communes à une conique donnée* U *et à chaque conique d'un système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* 3ν.

V. *Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point* P *à toutes les coniques d'un système est une courbe de l'ordre* $(\mu+\nu)$, *qui a un point multiple d'ordre* μ *en* P.

VI. *Le lieu des points dont chacun a la même polaire dans une conique donnée* U *et dans une conique quelconque du système* (μ, ν) *est une courbe de l'ordre* $(\mu+\nu)$.

Corollaire. — *Le nombre des coniques* (μ, ν) *qui touchent une conique quelconque* U *est* $2(\mu+\nu)$.

VII. *Les tangentes communes à une conique donnée* U *et aux coniques d'un système* (μ, ν) *ont leurs points de contact avec ces dernières sur une courbe d'ordre* $2(\mu+\nu)$, *qui a* $2(\mu+\nu)$ *points de contact avec* U.

Ces 2 $(\mu + \nu)$ points sont les points de contact des coniques du système et de la conique U.

VIII. *Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point* P *sur les coniques du système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* $(2\mu + \nu)$, *qui a un point multiple d'ordre* μ *en* P.

IX. *Le lieu des sommets des coniques du système* (μ, ν) *est une courbe de l'ordre* $(2\mu + 3\nu)$.

X. *Le lieu des points de rencontre des coniques du système* (μ, ν) *et de leurs diamètres qui aboutissent à un point fixe est une courbe de l'ordre* $(\mu + 2\nu)$.

XI. *Le lieu d'un point dont l'axe harmonique, relatif à une courbe d'ordre* m, *coïncide avec la polaire de ce point relative à une quelconque des coniques d'un système* (μ, ν), *est une courbe de l'ordre* $[\mu(m-1) + \nu]$ (*).

Corollaire. — Cette courbe rencontre la courbe d'ordre m en $m[\mu(m-1) + \nu]$ points, en chacun desquels une conique du système touche la courbe. Donc :

(*) Ce théorème n'est point particulier aux coniques; il s'applique à des courbes d'ordre quelconque, c'est-à-dire que : *Lorsqu'on a un système de courbes d'ordre quelconque* r *déterminées toutes par* $\frac{r(r+3)}{2} - 1$ *conditions communes et dont les caractéristiques sont* μ *et* ν, *le lieu d'un point dont l'axe harmonique relatif à une courbe d'ordre* m *coïncide avec l'axe harmonique de ce point, relatif à une courbe quelconque du système, est une courbe de l'ordre* $[\mu(m-1) + \nu]$.

On en conclut que *le nombre des courbes du système, qui touchent une courbe d'ordre* m, *est* $m[\mu(m-1) + \nu]$.

Plusieurs autres propriétés d'un système de coniques s'appliquent pareillement à un système (μ, ν) de courbes d'ordre quelconque; et souvent la fonction des caractéristiques reste la même, comme dans le cas actuel et dans les théorèmes I, V, VIII, XVI, XXII. C'est pour cela que j'ai annoncé que ces recherches, concernant les coniques, seraient un point de départ utile dans la théorie génerale des courbes d'ordre supérieur.

Il existe, dans un système de coniques (μ, ν), $m[\mu(m-1)+\nu]$ *coniques tangentes à une courbe donnée d'ordre* m.

COURBES ENVELOPPES.

XII. *Les polaires d'un point enveloppent une courbe de la classe* μ.

XIII. Lorsque toutes les coniques du système (μ, ν) sont tangentes à deux droites et satisfont à deux autres conditions, *la courbe enveloppe des polaires du point de concours des deux droites est de l'ordre* $\frac{\mu}{2}$.

XIV. *Les cordes que deux droites fixes interceptent dans toutes les coniques d'un système* (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* 3μ, *qui a deux tangentes multiples d'ordre* μ *coïncidant avec les deux droites.*

XV. *Les cordes communes à une conique* U *et à chaque conique d'un système* (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* 3μ.

XVI. *Les tangentes menées aux coniques* (μ, ν), *par les points où elles coupent une droite donnée* D, *enveloppent une courbe de la classe* $(\mu+\nu)$, *qui a la droite* D *pour tangente multiple d'ordre* ν.

Corollaire I. — La courbe de la classe $(\mu+\nu)$ admet $(\mu+\nu)$ tangentes passant par un point quelconque. Prenant ce point à l'infini, sur une perpendiculaire à la droite D, on en conclut que :

Le nombre des coniques d'un système (μ, ν), *qui coupent à angle droit une droite donnée, est* $(\mu+\nu)$.

Corollaire II. — Si la droite D est à l'infini, le théorème prend cet énoncé :

Les asymptotes des coniques d'un système (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν *à l'infini.*

Conséquemment la courbe a ν branches paraboliques.

XVII. *L'enveloppe des droites dont chacune a le même pôle dans une conique donnée* U *et dans une conique quelconque du système* (μ, ν) *est une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$.

Cette courbe a $2(\mu + \nu)$ tangentes communes avec U; et les $2(\mu + \nu)$ points de contact sur U sont les points où $2(\mu + \nu)$ coniques du système touchent la conique U.

XVIII. *Si par les points où une conique* U *rencontre chaque conique d'un système* (μ, ν) *on mène les tangentes de celles-ci, ces tangentes enveloppent une courbe de la classe* $2(\mu + \nu)$ *qui a* $2(\mu + \nu)$ *points de contact avec* U.

Ces $2(\mu + \nu)$ points déterminent $2(\mu + \nu)$ coniques du système tangentes à U en ces points.

XIX. *Les axes des coniques d'un système* (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XX. *Lorsqu'un axe de chaque conique d'un système* (μ, ν), *qui satisfait à trois autres conditions, passe par un point fixe, la courbe enveloppe des autres axes est de la classe* 2ν.

XXI. *Les diamètres d'un système de coniques* (μ, ν), *qui rencontrent ces courbes sur une droite donnée, enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + 2\nu)$, *qui a cette droite pour tangente multiple d'ordre* 2ν.

XXII. *Les normales des coniques d'un système* (μ, ν)

aux points de ces courbes situés sur une droite donnée, enveloppent une courbe de la classe $(2\mu + \nu)$, *qui a cette droite pour tangente multiple d'ordre* $(\mu + \nu)$.

XXIII. *Si dans chaque conique d'un système* (μ, ν) *on mène deux diamètres rectangulaires, dont l'un passe par un point fixe, l'autre diamètre enveloppe une courbe de la classe* 2ν, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XXIV. *Les diamètres dont les conjugués passent par un point donné enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XXV. *Les directrices d'un système de coniques* (μ, ν) *enveloppent une courbe de la classe* $(2\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XXVI. *Dans un système de coniques* (μ, ν), *dont une directrice passe par un point donné, et qui satisfont à trois conditions communes, les autres directrices enveloppent une courbe de la classe* $(\mu + \nu)$, *qui a une tangente multiple d'ordre* ν, *à l'infini.*

XXVII. Lorsqu'on a une courbe géométrique de la classse n, et une droite D, si de chaque point de la droite on mène les n tangentes de la courbe, et l'axe harmonique de la droite D relatif à ce faisceau de tangentes, cet axe passe toujours par un même point I que nous appellerons le pôle harmonique de la droite D (*).

Cela posé :

Lorsqu'on a un système de coniques (μ, ν) *et une courbe* U' *de la classe* n, *l'enveloppe d'une droite va-*

(*) Voir *Aperçu historique*, p. 623. — *Traité de Géométrie supérieure*, art. 496.

riable, qui a un même pôle harmonique dans la courbe U′ *et dans chaque conique du système, est une courbe de la classe* $[\mu + (n-1)\nu]$.

Corollaire. — Cette courbe a $n[\mu + (n-1)\nu]$ tangentes communes avec la courbe U′, en chacune desquelles une conique du système touche la courbe U′. Conséquemment :

Il existe $n[\mu + (n-1)\nu]$ *coniques tangentes à une courbe de la classe* n.

Cette formule n'est pas différente au fond de celle du théorème (XI).

PROPRIÉTÉS DIVERSES D'UN SYSTÈME (μ, ν).

XXVIII. 1° *Dans un système de coniques* (μ, ν), *le nombre de ces courbes qui divisent un segment donné, en rapport harmonique, est* μ.

Corollaire I. — *Dans un système de coniques* (μ, ν), *il existe* μ *hyperboles équilatères.*

Corollaire II. — *Un faisceau de coniques étant donné, ainsi qu'un système de coniques* (μ, ν), *il existe dans ce système* μ *coniques homothétiques, respectivement, à* μ *coniques du faisceau.*

2° *Le nombre des coniques par rapport auxquelles deux droites données sont conjuguées, est* ν.

XXIX. 1° *Dans un système de coniques* (μ, ν), *le nombre des coniques semblables à une conique donnée (autre que le cercle et l'hyperbole équilatère), est* 2μ.

2° *Le nombre des coniques dont les tangentes menées par un point fixe donné font entre elles un angle donné, est* 2ν.

Et ce nombre est ν *quand l'angle est droit.*

XXX. 1° *Dans un système de coniques, la condition que les courbes coupent un segment donné en rapport harmonique, équivaut à la condition de passer par un point.*

C'est-à-dire que, si, dans un système, on change la condition de passer par un point, en celle de diviser un segment donné harmoniquement, les caractéristiques du système restent les mêmes.

2° *La condition que, dans les coniques d'un système, deux droites données soient conjuguées par rapport à toutes les coniques d'un système, équivaut à celle que les coniques soient toutes tangentes à une droite.*

C'est-à-dire que, si l'on remplace la condition de toucher une droite, par la condition que deux droites données soient conjuguées relativement à toutes les coniques d'un système, les caractéristiques du système ne changent pas.

XXXI. *La condition d'avoir un foyer en un point donné équivaut à celle de toucher deux droites.*

NOTE DU RÉDACTEUR.

Toutes ces propositions se démontrent en s'appuyant sur les théorèmes I ou II (p. 195). Comme exemple nous allons démontrer la première proposition, savoir :

Le lieu des pôles d'une droite est de l'ordre ν.

Soit D la droite donnée. Cherchons combien il y aura de pôles de cette droite situés sur une droite quelconque L qui rencontre D au point S. Si le pôle de la droite D par rapport à une conique du système se trouve sur la droite L, les droites D et L et les deux tangentes menées par le point S formeront un faisceau harmonique. La question revient donc à celle-ci :

Étant données deux droites SE *et* SF, *combien existe-t-il de coniques telles, que les tangentes menées du point* S *soient conjuguées harmoniques par rapport à* SE *et à* SF?

Soit SX une droite partant du point S. Elle touchera ν coniques, soit SX′ la seconde tangente menée de S à une de ces ν coniques et SU la conjuguée harmonique de SX′ par rapport à SE et SF. A chaque droite SX correspondent ν droites SU et réciproquement à chaque droite SU correspondent ν droites SX. Donc il y aura 2ν droites SU coïncidant avec la droite correspondante SX. Mais comme les tangentes SX′ et SX menées à la même conique correspondent à la même solution, il n'y a donc que ν solutions. La droite L rencontre donc en ν points le lieu des pôles qui est ainsi de l'ordre ν.

C. Q. F. D.

Il importe de remarquer que dans toutes les parties de la méthode, les conditions Z, Z′,... de chaque système doivent avoir entre elles une entière indépendance. Si par exemple les coniques doivent toucher une courbe donnée U, cette courbe ne doit avoir aucune relation avec les autres données de la question : de sorte que si parmi celles-ci se trouve la condition que toutes les coniques passent par un même point, la courbe U est supposée ne pas passer par ce point. De même le lieu des centres ne serait pas du degré ν, si l'une des conditions du système (μ, ν) était que ce centre se trouve sur une courbe donnée.

Lorsqu'il existe entre les conditions données Z, Z′, Z″... certaines dépendances ou des conditions subsidiaires (*),

(*) Par exemple, le nombre des coniques (μ, ν), qui sont tangentes à une conique quelconque U, est $2(\mu+\nu)$: mais si U est une conique du système, ce nombre n'est plus que $2(\mu+\nu-3)$.

les résultats sont différents et ne peuvent pas se conclure immédiatement des formules primitives. Il faut traiter directement ces cas particuliers, mais par la méthode générale. La formule générale, qui comprend la solution de toutes les questions, s'applique aussi à tous les cas particuliers, puisqu'il suffit de mettre dans cette formule les paramètres α, β, qui conviennent à ces cas particuliers.

P.