Nouvelles annales de mathématiques

Sur le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions données ; d'après M. Chasles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 193-203

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__193_0>

SUR LE NOMBRE DES CONIQUES QUI SATISFONT A CINQ CONDITIONS DONNÉES;

D'APRÈS M. CHASLES.

Nous avons déjà parlé de la méthode de M. Chasles pour résoudre certains problèmes relatifs aux courbes planes, et que son illustre auteur a étendue successivement aux coniques dans l'espace et aux surfaces du second ordre. En attendant le second volume du *Traité des coniques*, qui doit faire connaître tous les détails de cette admirable méthode, nos lecteurs seront sans doute bien aises d'en avoir une idée. C'est pourquoi nous allons exposer plus spécialement et appliquer aux seules coniques le procédé de substitution géométrique d'un caractère si original et d'une si grande portée. Une suite d'énoncés, empruntés textuellement à un Mémoire de M. Chasles, donnera les principales propriétés des systèmes de coniques dont la connaissance est indispensable pour l'application de la méthode.

I.

Les propriétés d'un système de coniques assujetties à quatre conditions dépendent essentiellement de deux nombres, que M. Chasles appelle les *caractéristiques* du système, et qui sont : 1° le nombre μ de ces coniques qui passent par un point donné; 2° le nombre ν de ces coniques qui touchent une droite donnée. Le symbole (μ, ν) représentera un pareil système, et tous les systèmes qui ont les mêmes caractéristiques, quoique satisfaisant à des conditions bien différentes, auront en commun une foule de propriétés ayant leur source dans cette communauté de caractéristiques. En général, nous désignerons par Z, Z', etc., diverses conditions auxquelles sont assujetties diverses coniques. Si la condition Z est de passer par un point donné, nous poserons $Z = 1$ p., si par deux points, $Z = 2$ p., etc. De même $Z = 2$ d., 3 d., etc., exprimeront la condition de toucher deux droites, trois droites, etc.

Pour exprimer qu'un système de coniques assujetties aux quatre conditions Z, Z', Z'', Z''' a pour caractéristiques μ et ν, nous écrirons

$$(Z, Z', Z'', Z''') \equiv (\mu, \nu).$$

Par exemple, comme parmi les coniques qui passent par quatre points il n'y en a qu'*une* qui passe par un point donné, et *deux* qui touchent une droite donnée, nous écrirons

$$(4 \text{ p.}) \equiv (1, 2);$$

nous aurons de même

$$(2 \text{ p.}, 2 \text{ d.}) \equiv (4, 4).$$

II.

Dans un système de coniques assujetties à quatre conditions, il existe toujours un certain nombre de coniques qui forment des cas particuliers, soit des coniques représentées par deux droites, soit des coniques réduites à une droite limitée à deux points ou *coniques infiniment aplaties*. Ces coniques exceptionnelles interviennent dans un grand nombre de questions, et elles ont créé jusqu'ici des difficultés, parce que, n'en connaissant pas le nombre dans chaque question, on n'en pouvait pas tenir compte. Or ce nombre est lié très-simplement aux caractéristiques μ et ν ; mais il nous faut démontrer d'abord deux théorèmes d'une importance capitale dans la théorie actuelle, et qui sont une extension naturelle du *principe de cor-*

respondance exposé par l'auteur il y a une dizaine d'années (*Comptes rendus*, 24 décembre 1855.)

THÉORÈME I. — *Lorsqu'on a sur une droite* L *deux séries de points x et u tels, qu'à un point x correspondent α points u, et, à un point u, β points x, le nombre des points x qui coïncident avec des points correspondants u est $\alpha + \beta$.*

En effet, représentons par les lettres x et u les distances des points des deux séries à une origine fixe prise sur L : on a, entre ces distances, une relation telle que

$$x^\beta(\mathrm{A}u^\alpha + \mathrm{B}u^{\alpha-1} + \ldots) + x^{\beta-1}(\mathrm{A}'u^\alpha + \mathrm{B}'u^{\alpha-1} + \ldots) + \ldots = 0,$$

et les points x qui coïncident avec des points correspondants u sont donnés par l'équation

$$\mathrm{A}x^{\alpha+\beta} + (\mathrm{B} + \mathrm{A}')\,x^{\alpha+\beta-1} + \ldots = 0.$$

Il suffit donc de prouver que le coefficient A n'est pas nul. Or, si le point u est à l'infini, l'équation entre x et u, mise sous la forme

$$x^\beta\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{u} + \ldots\right) + x^{\beta-1}\left(\mathrm{A}' + \frac{\mathrm{B}'}{u} + \ldots\right) + \ldots = 0,$$

se réduit à

$$\mathrm{A}x^\beta + \mathrm{A}'x^{\beta-1} + \ldots = 0;$$

et comme il doit toujours y avoir β points x correspondants au point u, le terme $\mathrm{A}x^\beta$ existe nécessairement dans cette équation et A ne peut pas être nul.

THÉORÈME II. — *Lorsque deux séries de droites* X *et* U *passent par un même point, si à une droite* X *correspondent α droites* U, *et, à une droite* U, *β droites* X, *il existera $\alpha + \beta$ droites* X *qui coïncideront avec les droites correspondantes* U.

Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent, car on peut supposer que les droites X et U soient déterminées par deux séries de points x et u situés sur une même droite L.

III.

Revenons maintenant aux coniques exceptionnelles; leur nombre est donné par le théorème suivant :

Dans tout système de coniques (μ, ν), *le nombre des coniques infiniment aplaties est* $(2\mu - \nu)$, *et le nombre des coniques représentées par deux droites est* $2\nu - \mu$.

Soit x un point pris sur une droite L. Par ce point il passe μ coniques du système. Chacune d'elles rencontre la droite en un point u. Il y a donc μ points u qui correspondent au point x, et réciproquement à chaque point u correspondent μ points x. Donc, d'après le lemme I, il y aura 2μ points x qui coïncident avec le point u correspondant, ce qui semble indiquer qu'il y a 2μ coniques tangentes à la droite L. Mais on sait que le nombre de ces coniques est ν. La différence $2\mu - \nu$ doit donc tenir au nombre des coniques infiniment aplaties qui rencontrent la droite en deux points coïncidents, sans être tangentes à la droite. Le nombre de ces coniques est donc $2\mu - \nu$.

La seconde partie de l'énoncé se démontre d'une manière analogue. Par un point S menons une tangente X à une conique du système. On pourra par le point S mener une seconde tangente U; comme, par hypothèse, il y a ν coniques qui touchent la droite X, il y aura donc ν droites U correspondant à la droite X, et réciproquement, à chaque droite U correspondront ν droites X. Donc (lemme II) le faisceau (X, U) aura 2ν droites doubles qui correspondront à autant de coniques qui passeront par le point S, à moins qu'il ne s'agisse des coniques réduites à deux droites, pour lesquelles X coïncide avec U sans que la conique passe par le point S. Or μ est le nombre des coniques qui passent par le point S. Donc $2\nu - \mu$ sera le nombre des coniques réduites à deux droites.

IV.

En général, les deux nombres $2\mu - \nu$ et $2\nu - \mu$, dont la somme $\mu + \nu$ indique le nombre total des coniques exceptionnelles, peuvent être obtenus d'une foule de manières. Il suffit de comparer des théorèmes démontrés de deux façons différentes. Dans l'une, les coniques exceptionnelles n'interviennent pas; dans l'autre, elles influent sur le résultat. La différence des deux résultats fait connaître le nombre de ces coniques. En voici un exemple :

Soient P et P' deux points du plan. Sur une droite D prenons un point x; comme l'enveloppe des polaires du point P, par rapport aux diverses coniques du système, est de l'ordre μ (*voir* l'article suivant, n° XII), il passera, par le point x, μ polaires du point P. Les polaires du point P', relatives aux mêmes coniques, couperont la droite D en μ points u. Ainsi à un point x correspondront μ points u sur la droite D, et réciproquement. Donc, en vertu de théorème I (p. 195), il y aura 2μ couples de points u et x, coïncidant sur la droite D. Mais les polaires des points P et P' se coupant sur la droite D, le point d'intersection sera la polaire de la droite PP'. Donc, sur la droite D, il y aurait 2μ pôles de la droite PP'. Mais le lieu des pôles d'une droite, relativement aux diverses coniques du système, est une courbe de l'ordre ν (article suivant, n° I). Donc il ne peut y avoir que ν pôles sur cette droite. La différence $2\mu - \nu$ ne doit provenir que des coniques exceptionnelles infiniment aplaties, qui ne donnent qu'une solution apparente. Donc $2\mu - \nu$ est le nombre des coniques infiniment aplaties.

Observons qu'on doit avoir $2\mu - \nu > 0$, $2\nu - \mu > 0$, en sorte que chaque caractéristique doit être comprise entre la moitié et le double de l'autre caractéristique.

V.

Occupons-nous maintenant de trouver les caractéristiques d'un système (μ, ν) de coniques assujetties à quatre conditions. L'observation démontre que le nombre des coniques de ce système, assujetties à une cinquième condition Z, est toujours de la forme $\alpha\mu + \beta\nu$, α et β étant des entiers positifs ou nuls. L'article suivant (p. 204) en donne de nombreux exemples. Si quelque condition, ce qu'on n'a pas encore rencontré, échappait à cette loi, les problèmes où entre cette condition échapperaient par le fait même aux formules que nous allons démontrer.

α et β seront dits les paramètres de la condition Z, et de même α', β' ceux de la condition Z′, etc.

Il faut d'abord avoir sous les yeux les caractéristiques des systèmes élémentaires, c'est-à-dire de ceux dont les conditions consistent à passer par des points ou à toucher des droites. Ces caractéristiques sont réunies dans le tableau suivant, qui est l'expression de théorèmes bien connus :

$$
\begin{aligned}
(4\text{ p.}) &\equiv (1, 2),\\
(3\text{ p.}, 1\text{ d.}) &\equiv (2, 4),\\
(2\text{ p.}, 2\text{ d.}) &\equiv (4, 4),\\
(2\text{ p.}, 3\text{ d.}) &\equiv (4, 2),\\
(4\text{ d.}) &\equiv (2, 1)
\end{aligned}
$$

Introduction de la condition Z. — On a, en désignant par $N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{IV}})$ le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions,

$$
\begin{aligned}
(3\text{ p.}, Z) &\equiv [N(3\text{ p.}, Z, 1\text{ p.}),\ N(3\text{ p.}, Z, 1\text{ d.})],\\
&\equiv [N(4\text{ p.}, Z),\ N(3\text{ p.}, 1\text{ d.}, Z)].
\end{aligned}
$$

Or les caractéristiques du système (4 p.) étant 1 et 2, et celles de (3 p., 1 d.) étant 2, 4, nous aurons par les notations adoptées

$$N(4\text{ p.}, Z) = \alpha + 2\beta, \quad N(3\text{ p.}, 1\text{ d.}, Z) = 2\alpha + 4\beta.$$

Donc

$$1^{o} \qquad (3\text{ p.}, Z) \equiv (\alpha + 2\beta,\ 2\alpha + 4\beta);$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}
2^{o}\quad (2\text{ p.}, Z, 1\text{ d.}) &\equiv [N(3\text{ p.}, 1\text{ d.}, Z),\ N(2\text{ p.}, 2\text{ d.}, Z)],\\
&\equiv (2\alpha + 4\beta,\ 4\alpha + 4\beta);\\
3^{o}\quad (1\text{ p.}, 2\text{ d.}, Z) &\equiv [N(2\text{ p.}, 2\text{ d.}, Z),\ N(1\text{ p.}, 3\text{ d.}, Z)],\\
&\equiv (4\alpha + 4\beta,\ 4\alpha + 2\beta);\\
4^{o}\quad (3\text{ d.}, Z) &\equiv [N(1\text{ p.}, 3\text{ d.}, Z),\ N(4\text{ d.}, Z)],\\
&\equiv (4\alpha + 2\beta,\ 2\alpha + \beta).
\end{aligned}$$

Nous avons donc ainsi les caractéristiques de tous les systèmes où la condition Z entre avec trois conditions élémentaires.

Introduction de la condition Z'. — On a trois couples de caractéristiques à calculer :

$$\begin{aligned}
1^{o}\quad (2\text{ p.}, Z, Z') &\equiv [N(3\text{ p.}, Z, Z'),\ N(2\text{ p.}, 1\text{ d.}, Z, Z')],\\
&\equiv [\alpha'(\alpha + 2\beta) + \beta'(2\alpha + 4\beta),\\
&\qquad\qquad \alpha'(2\alpha + 4\beta) + \beta'(4\alpha + 4\beta)],\\
&\equiv (\alpha\alpha' + 2\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta',\ 2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta'),
\end{aligned}$$

en posant, pour abréger, $\Sigma\alpha\beta' = \alpha\beta' + \beta\alpha'$;

$$\begin{aligned}
2^{o}\quad (1\text{ p.}, 1\text{ d.}, Z, Z') &\equiv [N(2\text{ p.}, 1\text{ d.}, Z, Z'),\\
&\qquad\qquad N(1\text{ p.}, 2\text{ d.}, Z, Z')],\\
&\equiv \begin{bmatrix} 2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta', \\ (4\alpha + 4\beta)\alpha' + (4\alpha + 2\beta)\beta' \end{bmatrix},\\
&\equiv (2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta',\\
&\qquad\qquad 4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta');
\end{aligned}$$

3° $(2\text{d.}, Z, Z') \equiv [N(1\text{p.}, 2\text{d.}, Z, Z'),\ N(3\text{d.}, Z, Z')]$,

$$\equiv \begin{bmatrix} 4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta', \\ (4\alpha + 2\beta)\alpha' + 2\alpha + \beta)\beta' \end{bmatrix},$$

$$\equiv (4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta',\quad 4\alpha\alpha' + 2\Sigma\alpha\beta' + \beta\beta').$$

Introduction de la condition Z''. — On a :

1° $(1\text{ p.}, Z, Z', Z'') \equiv [N(2\text{p.}, Z, Z', Z''),\ N(1\text{p.}, 1\text{d.}, Z, Z', Z'')]$,

$$\equiv \begin{bmatrix} (\alpha\alpha' + 2\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta')\alpha'' \\ \quad + (2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta')\beta'', \\ (2\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 4\beta\beta')\alpha'' \\ \quad + (4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta')\beta'' \end{bmatrix},$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \alpha\alpha'\alpha'' + 2\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 4\beta\beta'\beta'', \\ 2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 2\beta\beta'\beta'' \end{bmatrix};$$

2° $(1\text{ d.}, Z, Z', Z'') \equiv [N(1\text{p.}, 1\text{d.}, Z, Z', Z''),\ N(2\text{d.}, Z, Z', Z'')]$,

$$\equiv \begin{bmatrix} 2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' \\ \quad + 2\beta\beta'\beta'', \\ (4\alpha\alpha' + 4\Sigma\alpha\beta' + 2\beta\beta')\alpha'' \\ \quad + (4\alpha\alpha' + 2\Sigma\alpha\beta' + \beta\beta')\beta'' \end{bmatrix},$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 2\beta\beta'\beta'', \\ 4\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 2\Sigma\alpha\beta'\beta'' + \beta\beta'\beta'' \end{bmatrix}.$$

Introduction de la condition Z'''. — On a

$$(Z, Z', Z'', Z''')$$
$$\equiv [N(1\text{ p.}, Z, Z', Z'', Z'''),\ N(1\text{ d.}, Z, Z', Z'', Z''')],$$
$$\equiv (a, b);$$

$$a = (\alpha\alpha'\alpha'' + 2\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 4\beta\beta'\beta'')\alpha'''$$
$$+ (2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 2\beta\beta'\beta'')\beta'''$$
$$= \alpha\alpha'\alpha''\alpha''' + 2\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta''' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta'''$$
$$+ 2\beta\beta'\beta''\beta''';$$

$$b = (2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 2\beta\beta'\beta'')\alpha'''$$
$$+ (4\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 2\Sigma\alpha\beta'\beta'' + \beta\beta'\beta'')\beta''$$
$$= 2\alpha\alpha'\alpha''\alpha''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta'''$$
$$+ 2\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta''' + 2\beta\beta'\beta''\beta'''.$$

VI.

Si maintenant on veut le nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions $Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{iv}}$, on aura, α^{iv} et β^{iv} étant les paramètres de la nouvelle condition,

$$N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{iv}}) = \alpha^{\text{iv}}\mathrm{a} + \beta^{\text{iv}}\mathrm{b},$$

ou, tout calcul fait,

$$\begin{aligned} &N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{iv}}) \\ &\quad = \alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{\text{iv}} + 2\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\beta^{\text{iv}} + 4\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta'''\beta^{\text{iv}} \\ &\qquad + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta'''\beta^{\text{iv}} + 2\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{iv}} + \beta\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{iv}}. \end{aligned}$$

Telle est la formule que nous voulions établir. Elle contient dix paramètres; mais il n'entre jamais dans un terme deux paramètres relatifs à la même condition. Les coefficients sont les nombres de solutions des systèmes élémentaires.

VII.

Application. — *Trouver le nombre des coniques qui passent par un point, touchent deux droites données et une conique donnée.*

Nous avons ici

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad (\text{déf.}),$$
$$\alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta' = \beta'' = 1 \quad (\text{déf.}),$$
$$\alpha''' = \alpha^{\text{iv}} = 2, \quad \beta''' = \beta^{\text{iv}} = 2 \quad (\text{art. suiv., XI, coroll.});$$

il en résulte

$$\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{\text{iv}} = 0, \quad \Sigma\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\beta^{\text{iv}} = 0,$$
$$\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta'''\beta^{\text{iv}} = \alpha\alpha'''\alpha^{\text{iv}}\beta'\beta'' = 4,$$
$$\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta'''\beta^{\text{iv}} = \alpha\alpha'''\beta'\beta''\beta^{\text{iv}} + \alpha\alpha^{\text{iv}}\beta'\beta''\beta''' = 8,$$
$$\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{iv}} = \alpha\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{iv}} = 4,$$
$$\beta\beta'\beta''\beta'''\beta^{\text{iv}} = 0.$$

On a donc

$$x = 16 + 32 + 8 = 56.$$

Ainsi *il y a cinquante-six coniques qui passent par un point donné, touchent deux droites données et une conique donnée.*

VIII.

On peut arriver plus rapidement à la formule du n° VI, en remarquant que par la manière même dont chaque condition est introduite, ses paramètres n'entrent dans la formule définitive que sous forme linéaire. Le nombre des solutions est donc représenté par les divers termes du produit

$$(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta')(\alpha'' + \beta'')(\alpha''' + \beta''')(\alpha^{\text{IV}} + \beta^{\text{IV}}),$$

dont chacun doit être multiplié par un coefficient qui ne dépend que du nombre des α et des β entrant comme facteurs dans ce terme. Pour abréger, désignons par $(l\alpha m\beta)$ la somme des termes qui renferment l facteurs α et m ou $5 - l$ facteurs β, et par A_m^l le coefficient de cette somme. On aura

$$N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{IV}}) = \Sigma A_m^l (l\alpha m\beta).$$

Pour trouver A_m^l supposons, par exemple, que les cinq conditions soient de passer par trois points et de toucher deux droites; alors on aura

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 1, \quad \beta = \beta' = \beta'' = 0,$$
$$\alpha''' = \alpha^{\text{IV}} = 0, \quad \beta''' = \beta^{\text{IV}} = 1,$$

et le second membre se réduira au seul terme

$$\alpha\alpha'\alpha''\beta'''\beta^{\text{IV}} = 1.$$

On aura donc

$$N(3\text{ p.}, 2\text{ d.}) = A_2^3,$$

et, en général,

$$N(l\,\text{p.},\ m\,\text{d.}) = A_m^l.$$

Or, $N(l\text{p.}, m\text{d.})$ est égal, par définition, à la première caractéristique du système $[(l-1)\,\text{p.},\ m\text{d.}]$; on aura donc

$$N(5\,\text{p.}) = 1,\quad N(4\,\text{p.},\ 1\,\text{d.}) = 2,\quad N(3\,\text{p.},\ 2\,\text{d.}) = 4,$$
$$N(2\,\text{p.},\ 3\,\text{d.}) = 4,\quad N(\text{p.},\ 3\,\text{d.}) = 2,\quad N(5\,\text{d}) = 1.$$

La formule générale peut donc s'écrire

$$N(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{IV}}) = \Sigma N(l\,\text{p.},\ m\text{d.})\,(l\alpha\, m\beta)\ (*).$$

IX.

La méthode des caractéristiques, que nous venons d'exposer, ne s'applique pas aux seules coniques ; on conçoit qu'elle doive aussi convenir aux systèmes de courbes ou de surfaces d'ordre quelconque, et même qu'il existe pour chaque ordre une formule générale analogue à celle qui résume la méthode des coniques (§ VI). Les principes de cette méthode pourront même, il est permis de l'espérer, trouver des applications dans certaines questions d'analyse. Par sa généralité, par sa fécondité, on peut placer la méthode actuelle à côté de cet art analytique dont Viète, son auteur, disait fièrement : *Fastuosum problema problematum ars analytice... jure sibi adrogat, quod est,* NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE. (*In Artem analyticen Isagoge*, chap. VIII, p. 29.) P.

(*) Dans les surfaces du second ordre assujetties à huit conditions, il y a trois caractéristiques qui sont le nombre μ de surfaces qui passent par un point, le nombre ν de celles qui touchent une droite, et le nombre ρ de celles qui touchent un plan. Le nombre des surfaces du second ordre qui satisfont à neuf conditions est représenté par

$$\Sigma N(l\text{p.},\ m\text{d.},\ n\text{P})\,(l\alpha m\beta n\gamma),\quad l+m+n=9;$$

α, β, γ sont les paramètres d'une condition (communication académique du 26 février 1866).