Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 190-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__190_1>

QUESTIONS.

755. Soient F, F′ les foyers d'une ellipse de Cassini, C son centre, et P un point quelconque sur la courbe. Alors la normale en P fera avec FP un angle égal à celui que fait la droite CP avec F′P. (STREBOR.)

756. Soient F, F′ deux points fixes sur une surface sphérique, et considérons la courbe, lieu d'un point P, tel, que $\tang \frac{1}{2}\,\mathrm{FP}\,\tang \frac{1}{2}\,\mathrm{F'P} = \text{const.}$ Le grand cercle normal en P à cette courbe fera avec FP un angle égal à celui que fait avec F′P le grand cercle passant par P et le milieu de l'arc FF′. (STREBOR.)

757. On donne une courbe de troisième classe ayant une tangente double : les points de contact de cette tangente

et de la courbe sont A, B. D'un point quelconque pris dans le plan de la courbe donnée, on mène à celle-ci trois tangentes qui coupent la tangente AB aux points M, N, P.

On a toujours

$$\frac{AM \times AN \times AP}{BM \times BN \times BP} = \frac{\rho_A}{\rho_B},$$

ρ_A et ρ_B étant les rayons de courbure de la courbe donnée en A et B. [Mannheim (*).]

758. Le nombre a n'étant pas divisible par p, nombre premier impair, on sait que $a^{\frac{p-1}{2}} = pA \pm 1$: le reste ± 1 est représenté par $\left(\frac{a}{p}\right)$, notation de Legendre. Cela posé, on a

$$\sum (ax^2 + b)^{p-1} = pB - \left[1 + \left(\frac{-ab}{p}\right)\right],$$

$$\sum\sum (ax^2 + by^2 + c)^{p-1} = pC + \left(\frac{-ab}{p}\right).$$

a, b, c sont des entiers non divisibles par p; A, B, C sont entiers; les sommes sont prises en donnant à x et à y les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$. (Le Besgue.)

759. Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$ sont des entiers

---

(*) M. Mannheim nous fait remarquer que la solution de la question 605, insérée à la page 173 du tome III de la deuxième série, laisse à désirer.

On fait usage de l'équation

$$\lambda\beta^2\gamma + \mu\gamma^2\alpha + \nu\alpha^2\beta = 0,$$

qui n'est pas l'équation la plus générale des courbes du troisième degré à la fois inscrites et circonscrites au triangle dont les côtés ont pour équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

$< p$ et non divisibles par p. On représente par S_m^0, S_m le nombre des solutions des équations indéterminées

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 = py,$$
$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 + a_{m+1} = py,$$

en prenant $x_1, x_2, \ldots, x_m$ parmi les nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots, p-1.$$

On demande la démonstration des formules :

$$(1) \qquad (p-1) S_m = S_{m+1}^0 - S_m^0,$$

$$(6) \qquad S_m^0 - p^{m-1} = p\,(S_{m-2}^0 - p^{m-3}) \left(\frac{-a_{m-1} a_m}{p}\right),$$

$$(2) \qquad S_1^0 - 1 = 0,$$

$$(4) \qquad S_2^0 - p = (p-1 \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$(3) \qquad S_1 - 1 = \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$(7) \qquad S_{2n+1}^0 - p^{2n} = 0,$$

$$(8) \qquad S_{2n}^0 - p^{2n-1} = p^{n-1}(p-1)\left[\frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{2n}}{p}\right],$$

$$(5) \qquad S_2 - p = -\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$(9) \qquad S_{2n} - p^{2n-1} = -p^{n-1}\left[\frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{2n}}{p}\right],$$

$$(10) \qquad S_{2n+1} - p^{2n} = \left[\frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}}{p}\right].$$

Les numéros indiquent l'ordre à suivre dans les démonstrations, qui sont fort simples. (LE BESGUE.)

Note du Rédacteur. — M. Camille Jordan a donné ces formules et en a indiqué la vérification dans les *Comptes rendus* du 19 mars 1866. Dans les *Comptes rendus* du 1er avril, M. Le Besgue a montré que ces formules revenaient à celles qu'il a données dans le tome II (1837) du *Journal de M. Liouville*. P.