Nouvelles annales de mathématiques

Théodore Berner

Note sur le nombre des coniques qui touchent en cinq points une courbe du cinquième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 17-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__17_0>

NOTE SUR LE NOMBRE DES CONIQUES QUI TOUCHENT EN CINQ POINTS UNE COURBE DU CINQUIÈME DEGRÉ;

PAR M. THÉODORE BERNER,
Docteur en Philosophie à Berlin.

J'avais imaginé, il y a quelque temps, une méthode inductive pour évaluer le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions données; et comme je suis parvenu, sans avoir connaissance des belles recherches de M. Chasles, à des résultats conformes à ceux qui sont indiqués par ce grand géomètre dans les *Comptes rendus*, je veux exposer en peu de mots les principes de cette méthode.

J'ai montré (*) qu'étant donnée une courbe quelconque A du $n^{ième}$ degré, on peut toujours supposer qu'elle soit infiniment voisine à n droites quelconques D, sans nuire à sa généralité, c'est-à-dire qu'on peut prendre la courbe telle, qu'elle soit infiniment prête à être réduite à n droites D. J'ai montré de plus que cette courbe A peut être considérée comme ligne droite dans toute l'étendue d'une des droites D, excepté les points d'intersection avec les autres droites. Mais, dans tous ces points que je veux appeler *points doubles*, la courbe A se confond avec des hyperboles (réelles ou imaginaires).

Une courbe quelconque B, touchant une des droites D, doit être considérée comme touchant la courbe A. Une courbe B, passant par un point double des droites D, re-

(*) *De transformatione secundi ordinis, etc.* « Sur la transformation géométrique du second ordre, » § 8. Berlin, Calvary et C°.

présente *deux* courbes touchant la courbe A dans les *deux* branches hyperboliques. Si la courbe B passe par deux points doubles, elle représente quatre courbes dont chacune touche deux fois la courbe A, et ainsi de suite. Si la courbe B passe par n points doubles, on peut la considérer comme étant composée de 2^n courbes coïncidantes qui deviendront distinctes en faisant disparaître les points doubles et y substituant les hyperboles infiniment voisines.

J'ai indiqué dans le Mémoire cité de quelle manière on peut employer ces remarques à une grande partie des questions traitées récemment par M. Chasles. Dans tous les cas où la conique passe par des points donnés ou touche des courbes données *une seule fois* chacune, ma méthode n'offre pas de difficultés et les résultats sont en parfaite harmonie avec ceux de M. Chasles. Au contraire, si les conditions sont telles, qu'une seule des courbes données doit être touchée par la conique *dans plusieurs points*, la méthode de M. Chasles n'est guère applicable (*), et je ne peux trouver par la mienne qu'une limite inférieure du nombre cherché. Aussi, en traitant des coniques touchant en cinq points une courbe du cinquième ordre, je me propose seulement d'établir que le nombre des solutions données autrefois par M. de Jonquières dans ce journal (t. III, p. 222) est trop petit. Je n'énumérerai que les coniques dont l'existence n'est pas douteuse.

Supposez la courbe du cinquième degré dissolue en cinq droites. Cinq droites forment 12 pentagones simples. On peut circonscrire à chacun d'eux *une* conique qui, passant par cinq points doubles, doit être comptée 2^5 fois.

(*) Elle est applicable avec quelques modifications. (*Voir*, sur les conditions multiples, *Comptes rendus* · CHASLES, 22 août 1864; CREMONA, 7 novembre 1864, et tout récemment ZEUTHEN, 22 janvier 1866.) P.

Ainsi l'on a

$$1.12.2^5 \text{ coniques touchant la courbe dans cinq points.}$$

Otez une des cinq droites : cela se peut de 5 manières différentes. Les quatre droites qui vous restent constituent 3 quadrilatères simples. On peut circonscrire à chacun d'eux deux coniques qui touchent la droite supprimée. Ces coniques, passant par quatre points doubles, doivent être comptées 2^4 fois.

On aura donc

$$5.3.2.2^4 \text{ coniques.}$$

Maintenant ôtez deux droites : cela est possible de 10 manières différentes. Les trois droites qui restent constituent un triangle auquel on peut circonscrire quatre coniques touchant les deux droites réservées. Chacune de ces coniques, passant par trois points, sera comptée 2^3 fois.

Il en résulte

$$\frac{5.4}{1.2}.4.2^3 \text{ coniques.}$$

En ôtant trois ou quatre droites, il ne reste aucun polygone raisonnable; mais à toutes les droites on peut inscrire une seule conique. En ajoutant tous les nombres trouvés, il vient

$$1.12.2^5 + 5.3.2.2^4 + \frac{5.4}{1.2}.4.2^3 + 1 = 1185.$$

Ce nombre étant trouvé d'une manière *géométrique*, on peut le considérer comme limite *inférieure* du nombre cherché. M. de Jonquières ne trouve que 1135 coniques. Aussi la formule dont il déduit ce résultat ne saurait être juste (*).

Note du Rédacteur. — La méthode qui précède a déjà été employée par

---

(*) Cette formule, obtenue au moyen du procédé indiqué par M. Berner, présente effectivement une faute dans le dernier coefficient qui devrait être $+15$ au lieu de -35. Cette faute a été corrigée dans l'*errata* du dernier volume. P.

plusieurs géomètres pour trouver le nombre des solutions de certains problèmes. Malheureusement elle ne donne qu'une limite inférieure du nombre cherché et n'offre *absolument* aucun moyen de reconnaître si le nombre trouvé est exact ou trop petit. M. Chasles ne procède point ainsi : au lieu de demander à un cas très-particulier la solution d'un problème très-général, il remplace les conditions géométriques du problème par d'autres équivalentes, mais plus simples, et par une suite de réductions arrive aux problèmes les plus élémentaires. Tout l'intérêt de son travail est dans cette marche rigoureuse, neuve et féconde. Car il importe peu au fond qu'il y ait 3264 coniques tangentes à 5 coniques données ou qu'il y en ait 7776 ; mais il importe beaucoup, comme le dit Leibniz, de perfectionner l'art d'inventer et de trouver par raison tout ce qui se peut trouver par raison.

L'admirable méthode de M. Chasles et ses travaux antérieurs lui ont valu une distinction très-rare. La Société Royale de Londres lui a décerné la médaille de Copley. Nous publierons des extraits du Rapport du général Sabine, président de la Société Royale. P.