Solution de questions proposées dans Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 168-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__168_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 736;

PAR M. H. VIOLLAND,
Élève de l'École Normale.

Soient M *un point d'une courbe et* M_1 *le point correspondant de sa transformée par rayons vecteurs réciproques par rapport à un point* O; n, n_1 *les longueurs des normales à ces deux courbes comprises entre les points* M *et* M_1 *et une perpendiculaire à* OM *menée par le point* O; *enfin* ρ *et* ρ_1 *les rayons de courbure aux points* M *et* M_1. *On a*

$$\frac{n}{\rho} + \frac{n_1}{\rho_1} = 2.$$

(NICOLAÏDÈS.)

Soient r, r_1 les rayons vecteurs des deux points; la longueur n de la normale au premier point est

$$n = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Le rayon de courbure ρ au même point est donné par la formule

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dv}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}},$$

donc

$$\frac{n}{\rho} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Pour trouver $\frac{n_1}{\rho_1}$, remarquons que les deux points étant transformés par rayons vecteurs réciproques,

$$r_1 = \frac{k^2}{r}.$$

Différentiant deux fois

$$\frac{dr_1}{d\theta} = -\frac{k^2}{r^2}\frac{dr}{d\theta},$$

$$\frac{d^2r_1}{d\theta^2} = \frac{2k^3}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{k^2}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2},$$

remplaçant les quantités r_1, $\frac{dr_1}{d\theta}$, $\frac{d^2r_1}{d\theta}$ par leurs valeurs dans l'expression de la normale et du rayon de courbure au point M_1, on trouve, toutes réductions faites,

$$\frac{n_1}{\rho_1} = \frac{r^2 + r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2};$$

donc

$$\frac{n}{\rho} + \frac{n_1}{\rho_1} = \frac{2r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = 2.$$

C. Q. F. D.

Note. — Solutions analogues par MM. Bauquenne, candidat à l'École Normale; Cornu, Richard, élèves de l'École Normale; Mirza-Nizam; F. Richard, Lerosey et Chambard, élèves du collége Chaptal; Ribaucourt, Grassat, elèves de l'École Polytechnique; Merce Busco; M. Joseph Sacchi, professeur a Milan. M. Albert Parel remarque qu'il suffit de démontrer la question pour deux cercles Démonstration géométrique, par les limites, par M. Niewenglowski, élève de l'École Normale. M. Fouret, élève de l'Ecole Polytechnique, démontre la proposition en s'appuyant sur ce que si C et C_1 sont les centres des deux cercles, N et N_1 les extrémites des normales et I le point de rencontre des normales, le rapport anharmonique des points N, M, C, I est égal au rapport anharmonique des points N_1, M_1, C_1 I, et, qu'en outre, les normales sont également inclinées sur les rayons vecteurs. Par une autre démonstration, il trouve que si ε et ε_1 sont les angles de contingence en M et M_1, on a

$$\varepsilon + \varepsilon_1 = 2d\theta.$$

Pour le cas d'un point double d'une anallagmatique, on a

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{n}.$$

A l'occasion de la même question, M. Chemin, aussi elève de l'École Polytechnique, cherche les relations qui existent entre les arcs et les rayons de courbure de deux courbes dont l'une est la podaire de l'autre. Il trouve ainsi, en deux points correspondants,

$$ds' = \frac{r}{\rho}\, ds, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{2}{r} - \frac{\rho}{rn};$$

les lettres accentuees se rapportent à la podaire. P.

Questions 737 *et* 738

(voir 2e série, t. III, p. 418);

Par MM. DELAUNAY et DE VIARIS,
Élèves du lycée Saint-Louis.

737. *On peut inscrire à un cercle donné une infinite de triangles dont les hauteurs se croisent en un point donné. Trouver, par la Géométrie, la commune enveloppe des côtés de ces triangles.*

Lemme. — *Si du point de rencontre des hauteurs d'un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés et qu'on prolonge chacune d'elles d'une quantité égale à* *elle-même, les points ainsi obtenus sont sur le cercle circonscrit au triangle.*

Démonstration facile.

Soit G le centre du cercle et H le point donné. Menons du point H une sécante quelconque, rencontrant la circonférence aux points A et P. Au milieu de HP, élevons une perpendiculaire à cette ligne qui rencontre la circonférence aux points B et C : d'après le théorème précédent, le triangle ABC répond à la question. Il y en a donc une infinité.

Joignons OP, soit M le point d'intersection avec le côté BC; si nous menons HM, le lemme précédent nous donne $OM + MH = OM + MP = R$. De plus, BC fait des angles égaux avec les droites MO, MH; donc BC enveloppe l'ellipse qui a pour foyer les points O et H et le cercle donné pour cercle directeur.

738. *Une ellipse et l'un de ses cercles directeurs étant tracés, il existe une infinité de triangles simultanément inscrits au cercle et circonscrits à l'ellipse; le point de rencontre des hauteurs est le même pour tous ces triangles.*

Cette question est une réciproque de la précédente. Soit O le centre du cercle directeur, H l'autre foyer de l'ellipse. Menons une tangente quelconque à l'ellipse; soient B et C les points où elle rencontre la circonférence. Du foyer H abaissons une circonférence sur BC et prolongeons-la d'une quantité égale à elle-même. D'après une propriété connue du cercle directeur, le point P ainsi obtenu est sur ce cercle, soit A l'autre point où elle rencontre la circonférence. Dans le triangle ABC, AHP est une hauteur d'après le lemme précédent, et le point de rencontre des hauteurs de ce triangle est le point H. Les côtés AB et AC sont donc tangents (théorème précédent) à l'ellipse qui a pour foyer les points O et H et pour cercle directeur le cercle donné. Ceci démontre les propositions indiquées.

Note.— Les questions 737 et 738 ont été résolues par MM. Hatté, Niébylowski, Viant, Tannery, Braga, Calabre, Muzeau, Elliot, Emperauger, Labaille et P. Cagny, Grimaldi, Laisant, Nievenglowski, Lacauchie, Dastarac.

Mêmes questions;

Par. MM ARIÈS et MARMIER,
Élèves de l'École Sainte-Geneviève (classe du P. Joubert).

Lemme. — *A tout triangle correspond une ellipse ayant pour foyers le point de concours des hauteurs et le centre du cercle circonscrit, et tangente aux trois côtés du triangle ainsi qu'à ceux du triangle conjugué* (*).

Soient ABC le triangle considéré, (O) le centre du cercle circonscrit, (O′) le point de rencontre des hauteurs, α, β, γ les pieds des médianes, p, q, r les pieds des hauteurs.

Je considère l'ellipse ayant pour foyer le point de concours (O′) des hauteurs et tangente aux trois côtés du triangle. Le lieu des projections du foyer (O′) sur ses tangentes est le cercle passant par ses trois projections p, q, r : donc c'est le cercle des neuf points du triangle. Si, par les deuxièmes points de rencontre de ce cercle avec les côtés, on élève des perpendiculaires, ces perpendiculaires vont concourir en un même point (O), qui est le centre du cercle circonscrit au triangle. C'est donc le deuxième foyer de l'ellipse.

Le grand axe de cette ellipse est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle.

(*) Le triangle conjugue au triangle ABC s'obtient en abaissant du point O des perpendiculaires sur les côtés du triangle et prolongeant ces perpendiculaires de longueurs égales (*voir* 2e série, t. II, p. 133). P.

De même au triangle conjugué $A'B'C'$ correspond une ellipse ayant pour foyers le point de concours (O) des hauteurs et le point (O′) centre du cercle circonscrit à ce triangle qui touche les trois côtés $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ et la longueur de son grand axe est égale au rayon du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. Mais les triangles conjugués ABC, $A'B'C'$ sont égaux; donc les rayons des cercles circonscrits sont égaux; donc le grand axe de cette deuxième ellipse est le même que le grand axe de la première.

Les deux ellipses étant homofocales et ayant leurs grands axes égaux coïncident; on a donc le lemme énoncé.

Remarque. — Ce qui précède suppose que le point de concours des hauteurs et le centre du cercle circonscrit au triangle ABC soient intérieurs à ce triangle, c'est-à-dire que tous les angles du triangle soient aigus.

Dans le cas où le triangle est rectangle, l'ellipse se réduit à son axe, qui est la médiane du triangle rectangle correspondant à l'hypoténuse.

Quand le triangle a un angle obtus, il existe une hyperbole tangente aux trois côtés du triangle, et ayant pour foyers le point de concours des hauteurs et le centre du cercle circonscrit au triangle.

Il existe une infinité de triangles incrits dans un cercle donné, ayant pour centre le point (O′) et pour point de concours des hauteurs un point donné (O).

Je mène un rayon quelconque $O'A$ du cercle donné, je joins le point A au point O, par le milieu M de la ligne OO' je mène une parallèle au rayon $O'A$, et soit p' son point de rencontre avec la droite OA. Les deux triangles OAO', $Op'O'$ sont toujours semblables. Le point A, extrémité de la droite OA, décrit un cercle; donc le point p', milieu de cette droite, décrira aussi un cercle qui aura pour centre le point M et dont le rayon sera la moitié du rayon du cercle donné.

Je prolonge la droite OA jusqu'à son deuxième point de rencontre avec la circonférence; par ce point, j'élève une perpendiculaire à la droite Ap, et soient B et C les points de rencontre de cette perpendiculaire avec la circonférence donnée. J'achève le triangle ABC. Le cercle des neuf points de ce triangle passe par le point p, il passe par le point α, milieu du côté BC, ce point appartient au cercle décrit du point M, car $M\alpha = Mp'$ à cause de l'égalité des triangles $O'\alpha M$, OpM; son rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle; donc il se confond avec le cercle précédemment décrit du point M comme centre.

Il est évident, d'ailleurs, que ce triangle a pour point de concours des hauteurs le point O, puisque $Op' = p'A$.

On peut donc construire une infinité de triangles correspondants aux données. Les ellipses correspondant à tous ces triangles coïncident comme étant toutes homofocales et ayant même grand axe, ce qui donne le premier théorème de M. Serret.

Soit une ellipse donnée : d'un point A de son cercle directeur, je lui mène deux tangentes, qui rencontrent aux points B et C ce cercle directeur. Je dis que la droite BC est aussi tangente à l'ellipse. En effet, au triangle ABC correspond une ellipse tangente aux trois côtés du triangle, ayant pour foyer le centre (O') du cercle directeur et pour longueur du grand axe la longueur du rayon de ce même cercle. Cette ellipse et l'ellipse donnée ont le même foyer, grand axe de même longueur et deux tangentes communes. Si du foyer commun (O') j'abaisse des perpendiculaires sur les deux tangentes communes, les pieds q et r de ces perpendiculaires appartiennent au cercle lieu des projections des foyers sur les tangentes correspondant à chaque ellipse. Les deux cercles relatifs aux deux ellipses ont donc deux points communs et même rayon; donc ils coïncident, donc les deux ellipses coïncident, et par suite le côté BC est tangent à l'ellipse donnée. On a donc le deuxième théorème de M. Serret.

Généralisation de ces théorèmes.

A tout tétraèdre donné dont les hauteurs concourent en un même point (O'), correspond un ellipsoïde de révolution ayant pour foyers le point (O') et le point de concours (O) des normales menées à chaque face par son centre de gravité : cet ellipsoïde est tangent aux quatre faces du tétraèdre et à celles du tétraèdre conjugué (*) : la longueur de son demi grand axe est le tiers du rayon de la sphère circonscrite.

Je considère un ellipsoïde de révolution tangent aux quatre faces du tétraèdre et ayant pour foyer le point de concours O' des hauteurs. J'abaisse de ce point des perpendiculaires sur les quatre faces. Les pieds de ces perpendiculaires déterminent une sphère qui est la sphère des douze points du tétraèdre. On sait que le centre M de cette sphère est au milieu de la ligne OO' et que son rayon égale le tiers du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre.

Cette sphère se confond évidemment avec la sphère lieu des projections des foyers sur les plans tangents à l'ellipsoïde, comme ayant quatre points communs. Son centre M est donc le centre de l'ellipsoïde. Le deuxième foyer de l'ellipsoïde s'obtient en prolongeant la droite O'M d'une longueur MO = O'M. Le point O, que l'on obtient ainsi, est précisément le point de rencontre des nor-

---

(*) *Voir* t. II, p. 135.

males élevées à chaque face par son centre de gravité.

Les points O et O′ étant réciproques l'un de l'autre dans les deux tétraèdres conjugués, il s'ensuit que l'ellipsoïde correspondant au tétraèdre conjugué se confondra avec le premier ellipsoïde, comme ayant les mêmes foyers et le même grand axe.

Remarque. — Si l'un des dièdres du tétraèdre dont les hauteurs concourent en un même point était obtus, il existerait un hyperboloïde de révolution à une nappe ayant pour foyers le point de concours des hauteurs et le point de concours des normales élevées à chaque face par son centre de gravité, tangent aux quatre faces du tétraèdre donné et à celles de son conjugué.

Il existe une infinité de tétraèdres inscrits dans une sphère donnée dont les hauteurs concourent en un même point donné (O′) : l'enveloppe des faces de ce tétraèdre est un ellipsoïde de révolution, ayant pour foyers le point (O′) et un deuxième point fixe (O), et pour demi grand axe le tiers du rayon de la sphère donnée.

Ce point fixe est obtenu en joignant le point de concours des hauteurs au centre K de la sphère circonscrite et prenant sur cette droite une longueur $KO = \frac{KO'}{3}$.

Je mène un rayon quelconque KA de la sphère donnée, je joins le point A au point (O′). Du point M, milieu de OO′, je mène une parallèle à la droite KA, et soit p' le point où elle rencontre la droite AO′. Les deux triangles KO′A, MO′p' sont toujours semblables. Le point A décrit la sphère donnée; le point p' décrit une autre sphère dont le centre est M et le rayon le tiers du rayon de la sphère donnée.

Je prolonge la droite O′A jusqu'à son deuxième point de rencontre p avec la sphère; j'élève en ce point un plan perpendiculaire à la droite O′p. Ce plan coupe la sphère (K) suivant un cercle. Le triangle de base du tétraèdre doit être inscrit dans ce cercle, et de plus le point de concours des hauteurs de ce triangle est le point p; car on sait que dans un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, la projection d'un sommet sur la face opposée est le point de concours des hauteurs de cette face.

Remarquons que si du point (O) nous abaissons une perpendiculaire $O\alpha$ sur ce plan, la distance $O\alpha = O'p' = \frac{O'A}{3}$, d'après un théorème connu. Donc la sphère (M) passe par le point α.

La sphère des douze points d'un des tétraèdres dont les hauteurs se coupent au point O, doit donc passer par les points α, p, p' et avoir un rayon égal au tiers de celui de la sphère (K); donc la sphère des douze points se confond avec la sphère (M). Donc tous les tétraèdres inscrits dans la sphère (K) et ayant pour sphère des douze points la sphère (M), sont tels, que leurs hauteurs concourent au point O. Donc il y en a une infinité. Si nous considérons un de ces tétraèdres, à ce tétraèdre correspond un ellipsoïde de révolution tangent aux quatre faces, et ayant pour foyers les points (O) et (O'), le demi grand axe de cet ellipsoïde étant égal au tiers du rayon de la sphère (K); or les ellipsoïdes correspondant à tous ces tétraèdres se confondent, comme étant de révolution homofocale et ayant même grand axe.

Question 739

(voir 2e série, t. III, p. 429);

PAR M. NIÉBYLOWSKI,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée Bonaparte.

Équation d'une surface du second degré passant par trois droites. On peut mettre les équations des trois droites données sous la forme suivante :

$$1^{\text{re}}\text{ droite} \ldots \left\{\begin{array}{l} A = 0, \\ B = 0; \end{array}\right.$$

$$2^{\text{e}}\text{ droite} \ldots \left\{\begin{array}{l} C = 0, \\ D = 0; \end{array}\right.$$

$$3^{\text{e}}\text{ droite} \ldots \left\{\begin{array}{l} A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0, \\ A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta' = 0. \end{array}\right.$$

L'équation de la surface du second degré est

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'};$$

A, B, C, D *désignent des fonctions du premier degré en* x, y *et* z, *et* α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' *sont des constantes.* (E. BARBIER.)

L'équation d'une surface du second degré passant par la deuxième et la troisième droite est

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda C(A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta) \\ \quad + \mu C(A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta') \\ \quad + \nu D(A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta) \\ \quad + D(A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta') = 0; \end{array}\right.$$

λ, μ, ν étant des indéterminées, on peut encore écrire

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{l} (\lambda C + \nu D)(A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta) \\ \quad + (\mu C + D)(A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta') = 0. \end{array}\right.$$

Exprimons que cette surface contient la droite

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \end{cases}$$

il vient

$$(\lambda C + \gamma D)(C\nu + D\delta) + (\mu C + D)(C\gamma' + D\delta') = 0$$

ou

$$(\lambda\gamma + \mu\gamma')C^2 + (\nu\delta + \delta')D^2 + (\lambda\delta + \nu\gamma + \mu\delta' + \gamma')CD = 0;$$

d'où

$$\lambda\gamma + \mu\gamma' = 0,$$
$$\nu\delta + \delta' = 0,$$
$$\lambda\delta + \nu\gamma + \mu\delta' + \gamma' = 0;$$

d'où

$$\nu = -\frac{\delta'}{\delta}, \quad \mu = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \lambda = -\frac{\gamma'}{\delta}.$$

Substituons dans l'équation (2), il vient

$$(C\gamma' + D\delta')(A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta)$$
$$- (C\gamma + D\delta)(A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta') = 0.$$

L'équation peut encore s'écrire

$$AC(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + AD(\alpha\delta' - \delta\alpha')$$
$$+ BC(\beta\gamma' - \gamma\beta') + BD(\beta\delta' - \delta\beta') = 0.$$

Or précisément, si l'on chasse les dénominateurs de l'équation

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'},$$

on arrive aux mêmes résultats; donc l'équation de la surface du second degré passant par les trois droites données est

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'}.$$

C. Q. F. D.

Note. — Solutions analogues de M. Armand Lévy, élève du lycée de Metz, et de M. Hatté, élève du lycée Charlemagne.

Question 740

(voir 2e série, tome IV, page 429);

PAR M. G. DE VIGNERAL.

Deux cercles étant donnés, on inscrit dans l'un d'eux un quadrilatère dont les côtés coupent la corde commune en quatre points. Il est possible d'inscrire dans l'autre cercle une infinité de quadrilatères dont les côtés passent par les mêmes points de la corde commune.

(E. BARBIER.)

e et f désignant les points communs aux deux cercles O et O′ et a, b, c, d les points où les côtés d'un quadrilatère inscrit dans le cercle O coupent la corde commune, les six points a, b, c, d, e, f sont en involution.

Or on peut mener d'une manière quelconque dans le second cercle O′ trois côtés d'un quadrilatère inscrit, ces côtés étant assujettis à passer par les points a, b, c; soit d' le point où le quatrième côté coupe la corde commune, les six points a, b, c, d', e, f sont en involution, mais les six points, a b, c, d, e, f y sont aussi, ce qui exige que d et d' soient confondus.

Note. — Autres solutions de MM. Rousset et Arnoye, elèves du lycée Charlemagne (classe de M. Berger); Marquez Braga, du lycée Saint-Louis; Armand Lévy, du lycée de Metz; Albert Dastarac, élève de l'École Centrale; Niébylowski, du lycée Bonaparte. M. Marmier, de l'École Sainte-Geneviève, remarque que le théorème est vrai pour deux coniques quelconques.