Nouvelles annales de mathématiques

Recoq

Propriétés focales des coniques passant par quatre points et des surfaces de révolution du second degré passant par cinq points

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 157-167

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__157_0>

PROPRIÉTÉS FOCALES

des coniques passant par quatre points et des surfaces de révolution du second degré passant par cinq points;

PAR M. RECOQ (*).

I. — *Des coniques passant par quatre points.*

1. THÉORÈME I. — *Lorsqu'une conique passe par quatre points donnés* A_1, A_2, A_3, A_4, *il y a une relation linéaire et homogène entre les distances* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ *d'un foyer à ces quatre points. Cette relation est, en appelant* S_1, S_2, S_3, S_4 *les surfaces des quatre triangles* $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, *etc.*,

$$S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0.$$

En exprimant que l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (mx+ny+p)^2$$

est vérifiée par les quatre points donnés (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), on a

$$mx_1 + ny_1 + p = \pm\sqrt{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2} = \pm\delta_1,$$
$$mx_2 + ny_2 + p = \pm\sqrt{(x_2-\alpha)^2 + (y_2-\beta)^2} = \pm\delta_2,$$
$$mx_3 + ny_3 + p = \pm\sqrt{(x_3-\alpha)^2 + (y_3-\beta)^2} = \pm\delta_3,$$
$$mx_4 + ny_4 + p = \pm\sqrt{(x_4-\alpha)^2 + (y_4-\beta)^2} = \pm\delta_4;$$

(*) Ce travail est le dernier d'un jeune homme qui donnait de belles espérances. M. Recoq, lauréat du concours général des colléges des départements, reçu à l'École Polytechnique et à l'École Normale, ayant opté pour cette dernière, est mort le 21 février 1866 à Montpellier.

d'où, éliminant m, n, p,

$$\begin{vmatrix} \pm\delta_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ \pm\delta_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ \pm\delta_3 & 1 & x_3 & y_3 \\ \pm\delta_4 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\delta_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \mp \delta_2 \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$\pm \delta_3 \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mp \delta_4 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les quatre déterminants qui sont en évidence représentent au signe près $2S_1$, $2S_2$, $2S_3$, $2S_4$, et l'on a

$$(1) \qquad S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0.$$

Remarque. — Cette relation représente le lieu des foyers des coniques passant par quatre points, en prenant pour coordonnées les distances d'un point quelconque du lieu à ces points. Ce lieu a pour équation en coordonnées rectilignes

$$S_1\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \pm S_2\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$
$$\pm S_3\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2} \pm S_4\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2} = 0.$$

Il est du sixième degré (*), car une droite à l'infini renferme six foyers, puisqu'il passe deux paraboles par quatre points et que chacune d'elles a trois foyers à l'infini. (*Voir* CREMONA, 2e série, t. III, p. 23.)

(*) Cependant, quand on chasse les radicaux, on a une équation du quatrième degre. P.

Les axes des deux paraboles qui passent par les quatre points sont deux directions asymptotiques. Les quatre points donnés sont quatre foyers (*) de la courbe. La transformation par rayons vecteurs réciproques n'altère pas la forme de l'équation (1).

2. *Cas particuliers.* — 1° Si les quatre points sont les sommets d'un parallélogramme, on a

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4,$$

et il vient, dans le cas de l'ellipse,

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0; \tag{2}$$

dans le cas de l'hyperbole,

$$\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 = 0, \tag{3}$$

en supposant que A_1, A_3 sont deux sommets opposés. On le voyait *à priori*.

2° En supposant que l'un des points soit le point de concours des hauteurs du triangle formé par les trois autres, la conique devient une hyperbole équilatère; dans ce cas l'énoncé précédent se modifie ainsi :

Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un foyer aux trois sommets et au point de concours des hauteurs.

Cette relation est, en appelant T la surface du triangle et D la distance du foyer considéré au point d'intersection des hauteurs, S_1, S_2, S_3 les surfaces des triangles ayant pour sommet ce même point et pour bases les côtés du triangle,

$$S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 = TD. \tag{4}$$

(*) J'appelle *foyer* dans une courbe le centre d'un cercle bitangent de rayon nul.

Elle représente le lieu des foyers des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.

Si le triangle est équilatéral, on a

$$D = \frac{\delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3}{3}.$$

Donc : *Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle équilatéral, la distance d'un foyer au centre est une moyenne algébrique entre ses distances aux trois sommets.*

3° On peut se demander ce que devient la relation générale quand l'un des points, A_4 par exemple, s'éloigne à l'infini suivant une direction donnée. Cette relation devient, en appelant a_1, a_2, a_3 les côtés du triangle fixe, lesquels servent de base à trois triangles ayant pour sommet commun A_4, et dont nous appellerons les hauteurs h_1, h_2, h_3,

$$a_1 h_1 \delta_1 \pm a_2 h_2 \delta_2 \pm a_3 h_3 \delta_3 \pm S_4 \delta_4 = 0,$$

ou

$$\pm \frac{h_1}{\delta_4} a_1 \delta_1 \pm \frac{h_2}{\delta_4} a_2 \delta_2 \pm \frac{h_3}{\delta_4} a_3 \delta_3 = S_4.$$

Or il est facile de voir que les rapports $\frac{h_1}{\delta_4}, \frac{h_2}{\delta_4}, \frac{h_3}{\delta_4}$ tendent vers $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant les angles des côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$ avec la direction fixe, et par suite, en appelant A_1, A_2, A_3 les projections des côtés de ce triangle sur une perpendiculaire à la direction fixe, et posant $S_4 = S$, on a

$$\pm A_1 \delta_1 \pm A_2 \delta_2 \pm A_3 \delta_3 = S.$$

4° Si deux des points A_3, A_4 vont à l'infini suivant deux directions déterminées, on a

$$\delta_1 \pm \delta_2 = \text{const.},$$

la constante étant affectée de deux valeurs qui sont l'une réelle, l'autre imaginaire, quand les points A_1, A_2 sont réels. Ainsi : le lieu des foyers des coniques semblables semblablement placées à une conique donnée et passant par deux points fixes (réels) se compose de deux coniques (l'une réelle, l'autre imaginaire) ayant pour foyers ces deux points.

3. J'appelle distance d'un point à un cercle la longueur de la tangente issue de ce point, et je considère non plus un cercle bitangent de rayon nul, mais un cercle bitangent de rayon r. En partant de l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=(mx+ny+p)^2,$$

on arrive, comme précédemment, à la relation

$$S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0,$$

où δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 sont les distances des points donnés au cercle bitangent; mais si l'on imagine quatre cercles de rayon r, ayant pour centres les quatre points, on voit que les distances du centre du cercle bitangent à ces quatre cercles ne sont autres que les distances δ_1, δ_2, δ_3, δ_4. Donc :

Théorème II. — *Étant donnés une conique passant par quatre points et un cercle bitangent de rayon r, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances du centre de ce cercle à quatre cercles fixes de rayon r ayant pour centre les quatre points donnés. Cette relation est*

$$S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0.$$

Elle représente le lieu du centre du cercle bitangent de rayon r quand la conique varie. Ce lieu est tangent à chacun des quatre cercles fixes au moins en deux points.

4. La relation (1), qui existe entre les rayons vecteurs d'un point quelconque du lieu des foyers des coniques circonscrites à un quadrilatère, est aussi la relation entre les cosinus des angles de la tangente en ce point avec les mêmes rayons vecteurs. Ainsi l'on a

$$S_1 \cos\theta_1 \pm S_2 \cos\theta_2 \pm S_3 \cos\theta_3 \pm S_4 \cos\theta_4 = 0,$$

et, plus généralement, si une courbe a pour équation

$$m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + \ldots + m_n \delta_n = \mathrm{K},$$

on a

$$m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 + \ldots + m_n \cos\theta_n = 0.$$

En effet, si l'on rapporte la courbe à deux axes rectangulaires, et si l'on appelle α l'angle de la tangente avec l'axe des x, on a, puisque

$$\delta_p = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2},$$

$$\tang\alpha = -\frac{m_1 \frac{x - x_1}{\delta_1} + m_2 \frac{x - x_2}{\delta_2} + \ldots + m_n \frac{x - x_n}{\delta_n}}{m_1 \frac{y - y_1}{\delta_1} + m_2 \frac{y - y_2}{\delta_2} + \ldots + m_n \frac{y - y_n}{\delta_n}},$$

ou, en désignant par $\mu_1, \mu_2, \ldots$ les angles que font avec l'axe des x les distances $\delta_1, \delta_2, \ldots$,

$$\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{m_1 \cos\mu_1 + m_2 \cos\mu_2 + \ldots + m_n \cos\mu_n}{m_1 \sin\mu_1 + m_2 \sin\mu_2 + \ldots + m_n \sin\mu_n}$$

ou

$$m_1 \cos(\alpha - \mu_1) + m_2 \cos(\alpha - \mu_2) + \ldots + m_n \cos(\alpha - \mu_n) = 0,$$

c'est-à-dire

$$m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 + \ldots + m_n \cos\theta_n = 0.$$

Cette formule fournit une construction de la tangente en un point quelconque de la courbe. Je me bornerai au cas des équations

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0, \quad \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 = 0,$$

qui représentent le lieu des foyers des ellipses et des hyperboles circonscrites à un parallélogramme. (La composition du concours de l'Ecole Normale en 1864 consistait en partie à trouver ce lieu.) On a dans ce cas

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 + \cos\theta_3 - \cos\theta_4 = 0,$$
$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - \cos\theta_3 - \cos\theta_4 = 0,$$

d'où l'on déduit la construction suivante :

Pour construire la tangente en un point quelconque M de la courbe lieu des foyers des coniques circonscrites à un parallélogramme, décrivez avec un rayon arbitraire un cercle ayant M pour centre, cherchez le centre des moyennes distances du quadrilatère qui a pour sommets les points d'intersection du cercle avec les rayons vecteurs du point M directs pour deux sommets opposés, ou adjacents inverses pour les deux autres, et la droite qui joindra le point M à ce point sera la normale.

Cette construction n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une construction beaucoup plus générale donnée par le marquis de L'Hôpital, lorsque la courbe considérée a une équation quelconque

$$f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n) = 0.$$

La simplification qui se présente ici provient de ce que les coefficients de l'équation différentielle ont des valeurs constantes qui sont précisément $m_1, m_2, \ldots, m_n$. (*Voir* Paul Serret, *Méth. en Géom.*, p. 64.)

II. — *Des surfaces de révolution du second degré passant par cinq points.*

1. Théorème I. — *Lorsqu'une surface de révolution passe par cinq points donnés* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, *il y a une*

relation linéaire et homogène entre les distances d'un foyer à ces cinq points. Cette relation est, en appelant V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 *les volumes des cinq tétraèdres* $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_4A_5, \ldots$,

$$V_1\delta_1 \pm V_2\delta_2 \pm V_3\delta_3 \pm V_4\delta_4 \pm V_5\delta_5 = 0.$$

On a, en considérant l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = (mx + ny + pz + q)^2,$$

$$mx_1 + ny_1 + pz_1 + q = \pm\sqrt{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 + (z_1-\gamma)^2} = \pm\delta_1,$$

$$mx_2 + ny_2 + pz_2 + q = \pm\sqrt{(x_2-\alpha)^2 + (y_2-\beta)^2 + (z_2-\gamma)^2} = \pm\delta_2,$$

$$mx_3 + ny_3 + pz_3 + q = \pm\sqrt{(x_3-\alpha)^2 + (y_3-\beta)^2 + (z_3-\gamma)^2} = \pm\delta_3,$$

$$mx_4 + ny_4 + pz_4 + q = \pm\sqrt{(x_4-\alpha)^2 + (y_4-\beta)^2 + (z_4-\gamma)^2} = \pm\delta_4,$$

$$mx_5 + ny_5 + pz_5 + q = \pm\sqrt{(x_5-\alpha)^2 + (y_5-\beta)^2 + (z_5-\gamma)^2} = \pm\delta_5;$$

d'où, eliminant m, n, p, q,

$$\begin{vmatrix} \pm\delta_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \pm\delta_2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \pm\delta_3 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ \pm\delta_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ \pm\delta_5 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} \pm \delta_2 \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \pm \delta_3 \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\pm \delta_4 \begin{vmatrix} 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \pm \delta_5 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(1)\qquad V_1\delta_1 \pm V_2\delta_2 \pm V_3\delta_3 \pm V_4\delta_4 \pm V_5\delta_5 = 0.$$

Remarque. — Cette équation représente le lieu des foyers des surfaces de révolution passant par cinq points.

2. Quatre points suffisent pour établir une relation entre les distances lorsqu'ils sont dans un même plan, car en prenant ce plan pour plan des xy on a

$$(2)\qquad \begin{cases} mx_1 + ny_1 + q = \delta_1, \\ mx_2 + ny_2 + q = \delta_2, \\ mx_3 + ny_3 + q = \delta_3, \\ mx_4 + ny_4 + q = \delta_4. \end{cases}$$

Le nombre des relations se réduit à quatre et le nombre des paramètres à trois. En éliminant m, n, q, il vient

$$(3)\qquad S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 \pm S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0.$$

Il y a plus : examinons le cas où la surface de révolution représente un cône, les deux foyers se réunissent au sommet et les deux plans directeurs se confondent en un plan unique mené par le sommet; on a

$$(4)\qquad m\alpha + n\beta + p\gamma + q = 0.$$

En joignant cette relation aux relations (2), on aurait, si on éliminait m, n, p, q, le lieu des sommets des cônes de révolution passant par les quatre points; mais comme les équations (2) ne contiennent pas p, l'élimination est indépendante de la relation (4), en sorte que le lieu des sommets se trouve représenté par l'équation (3). Donc :

Le lieu des sommets des cônes de révolution, passant par quatre points situés dans un même plan, est identique au lieu des foyers de toutes les surfaces de révolution satisfaisant aux mêmes conditions; il y a une relation linéaire et homogène entre les longueurs des génératrices aboutissant aux quatre points.

La surface (3) admet les sections circulaires

$$\begin{cases} S_1\delta_1 \pm S_2\delta_2 = 0, \\ S_3\delta_3 \pm S_4\delta_4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} S_1\delta_1 \pm S_3\delta_3 = 0, \\ S_2\delta_2 \pm S_4\delta_4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} S_1\delta_1 \pm S_4\delta_4 = 0, \\ S_2\delta_2 \pm S_3\delta_2 = 0. \end{cases}$$

3. Considérons cinq points dans un même plan, auquel cas la surface devra passer par une conique fixe; il faut, si l'on prend le plan des cinq points pour plan des x, y, joindre aux relations (2) la relation

$$mx_5 + ny_5 + q = \pm \delta_5,$$

et, si la surface doit représenter un cône, y joindre aussi

$$m\alpha + n\beta + p\gamma + q = 0.$$

Mais, comme tout à l'heure, cette dernière relation reste étrangère à l'élimination, en sorte que le lieu des foyers de *toutes* les surfaces de révolution, passant par une même conique, est identique au lieu des sommets des cônes de révolution menés par la même conique, et l'on sait que ce dernier lieu est formé des deux coniques (réelles ou imaginaires) lieu des foyers dans l'espace de la conique donnée (*).

En même temps se trouve démontré ce théorème de M. Ch. Dupin : Le cône qui a pour sommet un foyer d'une surface de révolution, et pour base une section plane quelconque, est de révolution.

On voit aussi qu'une conique et le lieu de ses foyers dans l'espace jouissent de cette propriété réciproque, qu'il y a *une relation linéaire et homogène entre les dis-*

(*) Ces deux coniques sont l'une reelle, l'autre imaginaire, quand la conique proposée est reelle.

tances de quatre points (pris sur la même courbe) *fixes de l'un à un point quelconque de l'autre.*

4. La circonstance précédente se présentera toutes les fois qu'une surface de révolution, passant par trois points fixes, aura l'un de ses foyers fixe, c'est-à-dire que cette surface sera assujettie à passer par une conique fixe. En effet, le plan des trois points coupe la surface suivant une conique satisfaisant à cinq conditions, puisqu'elle passe par trois points fixes et qu'elle est bitangente à un cercle fixe, qui est un petit cercle de la sphère focale fixe. Ces conditions déterminent, comme il serait facile de le voir, quatre coniques ; et, par suite, toutes les surfaces de révolution passant par trois points et ayant un foyer fixe peuvent être classées en quatre séries correspondant aux quatre coniques. En rapprochant ce résultat de ce qui précède, on voit que :

Lorsqu'une surface de révolution passe par trois points fixes et a un foyer fixe, le lieu de l'autre foyer se compose de huit coniques situées dans des plans perpendiculaires au plan des trois points.

5. Tous ces résultats peuvent se généraliser en considérant dans une surface de révolution, non plus un foyer, mais une sphère inscrite de rayon r ; la distance du foyer à l'un des points fixes sera remplacée par la distance du centre de la sphère tangente à des sphères de même rayon décrites des points fixes comme centres.