NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. PICQUET

Sur la podaire d'une conique par rapport à un foyer

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 145-156
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__145_0>

SUR LA PODAIRE D'UNE CONIQUE PAR RAPPORT A UN FOYER;

PAR M. H. PICQUET,
Élève de l'École Polytechnique.

On sait que la podaire d'une courbe du second degré par rapport à l'un de ses foyers est le cercle décrit sur son grand axe comme diamètre; nous nous proposons de faire voir ici comment cette propriété donne lieu en quelque sorte à un nouveau mode de transformation géométrique, et comment elle permet souvent de simplifier un énoncé ou une démonstration.

Cherchons, dans quelques cas, les conditions auxquelles ce cercle, que nous désignerons par C, est assujetti, lorsque la conique, qui d'ailleurs a un foyer fixe, doit satisfaire à une condition donnée.

I. Supposons que la conique doive varier en demeurant tangente à une droite fixe; le cercle C variera en passant par un point fixe, pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur cette droite. Comme conséquence, si plusieurs droites varient en restant tangentes à une conique fixe, cela revient à dire que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur ces droites restent sur un même cercle.

II. Ce cas est le plus simple. Supposons plus généralement que la conique doive rester tangente à une courbe fixe Q, alors le cercle C sera tangent à la podaire P de cette courbe par rapport au foyer de la conique. En effet, si nous considérons la courbe dans une position voisine où elle ait avec la conique deux tangentes communes très-rapprochées, nous voyons que le cercle C et la podaire P auront deux points communs qui seront les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur ces tangentes. Si la courbe devient tangente à la conique, ces tangentes viendront à coïncider et le cercle C aura avec la podaire P deux points communs réunis en un seul, c'est-à-dire qu'il lui sera tangent. Ainsi, si la conique doit être tangente à une parabole confocale avec elle, le cercle C sera tangent à la tangente au sommet de cette parabole; si au lieu d'une parabole on a une conique quelconque, confocale avec la première, le cercle C sera tangent au cercle ayant pour diamètre le grand axe de cette conique si c'est une ellipse, son axe transverse si c'est une hyperbole. Réciproquement, si le cercle C est tangent à une droite où à un cercle, la conique correspondante sera tangente à une parabole confocale ayant la droite donnée pour tangente au sommet, ou à une conique confocale, concentrique avec le cercle et ayant pour grand axe le rayon de ce cercle. Dans tout ce que nous venons de dire, il est évident que si le point de contact de la conique avec la courbe Q est donné, le point de contact du cercle C avec la podaire P sera déterminé; ce sera le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente à la courbe Q au point donné.

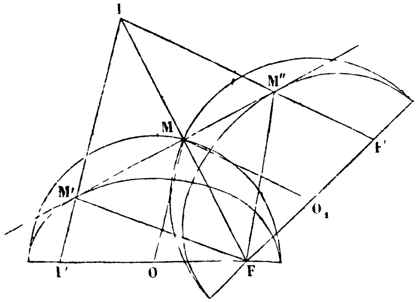
III. La conique doit passer par un point fixe A. Il en résulte, d'après la construction connue de la tangente à la podaire d'une courbe, que le cercle C sera tangent au cercle décrit sur AF comme diamètre, F étant le foyer de la conique. On voit ici qu'à un cercle tangent à deux autres correspond une conique passant par deux points; ceci n'implique pas contradiction avec ce qui a été dit précédemment; tout à l'heure le point F était quelconque, maintenant il doit être pris à l'un des points d'intersection des deux cercles donnés. De même, si le cercle est tangent à une droite, et si le point F est pris sur cette droite, la conique correspondante aura une direction asymptotique perpendiculaire à cette droite. Ceci se voit facilement en considérant ce cas comme une limite du précédent; on sait d'ailleurs que si du foyer d'une hyperbole on mène des tangentes au cercle ayant pour diamètre l'axe transverse, elles sont perpendiculaires aux asymptotes.

Comme application de cette propriété, on pourrait démontrer que tout cercle tangent à deux autres coupe orthogonalement un de leurs cercles bissecteurs, c'est-à-dire un des deux cercles qui passent par leurs points d'intersection et sont tangents aux bissectrices de l'angle sous lequel ils se coupent. Mais ceci est plus évident si l'on emploie la transformation par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle de transformation l'un des points communs à deux cercles et à leurs cercles bissecteurs. On pourrait ensuite tirer de là la construction du cercle tangent à trois cercles donnés, mais elle serait aussi compliquée que les constructions connues.

IV. Si la conique doit avoir pour demi grand axe une longueur donnée, le cercle C aura cette longueur pour rayon.

V. Si le cercle C doit couper un autre cercle C′ sous un angle donné, alors la conique correspondante au cercle C rencontrera la conique correspondante au cercle C′ de telle façon que les points de contact d'une tangente commune soient vus d'un foyer commun sous l'angle donné ou sous un angle supplémentaire. En effet, construisons les deux coniques confocales, une tangente commune M′M″ et les cercles correspondants; soient F le foyer commun, F' et F'' les autres foyers, O et O_1 les centres; soit M un point d'intersection des cercles, pied

Fig. 1.



de la perpendiculaire abaissée du point F sur la tangente commune $M'M''$; joignons $M'F'$ et $M''F''$; ces droites se rencontrent en I sur MF, car si l'on prend $IM = MF$ et si l'on joint IF' et IF'', ces droites passent respectivement par les points de contact d'après la théorie des foyers; donc

$$IM = MF;$$

par suite,

$$\widehat{M'FM} = \widehat{M'IM} \quad \text{et} \quad \widehat{M''FM} = \widehat{M''IM};$$

ajoutant,

$$\widehat{M'FM''} = \widehat{M'IM''};$$

joignons MO, MO_1, ces droites sont parallèles à IF', IF'', donc

$$\widehat{M'IM''} = \widehat{OMO_1} = \widehat{M'FM''}.$$

Or OMO_1 est supplémentaire de l'angle sous lequel les cercles se coupent; donc..., etc. C. Q. F. D.

La démonstration serait la même si les deux coniques n'étaient pas des ellipses.

On peut énoncer ce résultat en disant :

L'angle sous lequel on voit, du foyer commun de deux coniques confocales, les points de contact d'une tangente commune est égal à l'angle sous lequel se coupent les cercles décrits sur leurs grands axes respectifs comme diamètres.

Ce qui démontre en même temps la réciproque de ce que nous avions avancé. On voit qu'en particulier, si l'angle donné est nul, les coniques seront tangentes, ce que nous savons déjà.

Comme application, supposons qu'une série de coniques confocales soient disposées de telle sorte que les points de contact d'une tangente commune à chacune d'elles et à une autre conique fixe confocale avec elles soient vus du foyer commun sous un angle droit, alors les cercles correspondants à toutes ces coniques couperont orthogonalement le cercle correspondant à la conique fixe, c'est-à-dire qu'ils auront tous même centre radical, le centre de la conique fixe.

VI. Si la conique doit avoir pour centre un point donné, le cercle C aura pour centre le même point. Cette propriété permet de trouver un grand nombre de lieux de centres de coniques confocales, assujetties à deux autres conditions, le foyer commun étant donné. Nous savons, par exemple, que le lieu des centres des cercles tangents à deux droites se compose des deux bissectrices de leur angle ; le lieu des centres des coniques correspondantes sera le même ; les cercles étant tangents à deux droites, les coniques correspondantes seront tangentes à deux paraboles dont les droites données seront les tangentes aux sommets ; donc :

Le lieu des centres des coniques ayant un foyer commun et tangentes à deux paraboles confocales avec *elles se compose des deux bissectrices des tangentes aux sommets de ces paraboles.*

On peut ainsi trouver un grand nombre d'énoncés : nous en citerons quelques-uns.

Le lieu des centres des coniques ayant un foyer commun, tangentes à une conique confocale et ayant un grand axe donné, se compose de deux cercles concentriques à la conique et ayant pour rayon le grand axe de cette conique augmenté ou diminué du grand axe donné.

Le lieu des centres des coniques ayant un foyer commun F *et qui passent par deux points* A *et* B *se compose de deux coniques homofocales ayant pour foyers les milieux de* FA *et de* FB, *savoir : une ellipse ayant pour grand axe* $\frac{1}{2}(FA + FB)$, *et une hyperbole ayant pour axe transverse* $\frac{1}{2}(FA - FB)$.

Nous aurions ainsi presque tous les lieux de centres de coniques confocales assujetties à deux autres conditions.

VII. Les principes précédents peuvent s'appliquer à la transformation par la méthode des polaires réciproques. Supposons en effet que l'on ait à transformer un énoncé dans lequel entrent plusieurs cercles ; la transformation ordinaire par rapport à un cercle donnera des coniques confocales jouissant de certaines propriétés qui seront les transformées de celles des cercles donnés. Au lieu d'introduire ces coniques dans le nouvel énoncé, il sera en général plus élégant d'introduire les cercles décrits sur leurs grands axes comme diamètres, lesquels satisferont à certaines conditions résultant de celles qui sont imposées aux coniques correspondantes et qu'on pourra souvent déduire de ce qui précède. Prenons un exemple : on sait (*Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 234) que le cercle circonscrit à un triangle conjugué à une conique a pour puissance par rapport au centre de la conique la somme des carrés de ses demi-axes, c'est-à-dire que tous les cercles analogues ont pour centre radical commun le centre de la conique. Transformons cet énoncé par rapport à un pôle de transformation quelconque : nous aurons une conique, ses triangles conjugués et la série des coniques inscrites dans ces triangles et ayant le pôle de transformation pour foyer; ces coniques seront telles, que les points de contact de leurs tangentes communes avec une conique fixe confocale (polaire du cercle coupé orthogonalement par tous les autres) seront vus du foyer commun sous un angle droit, donc leurs cercles correspondants auront même centre radical (V). En outre, les cercles correspondants sont parfaitement définis : ce sont les cercles passant par les trois pieds des perpendiculaires abaissées du foyer commun sur les côtés de chaque triangle conjugué. On a donc cet énoncé :

On donne sur un plan une conique et un point fixe; on abaisse de ce point des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle conjugué à la conique, et par les pieds de ces perpendiculaires on fait passer une circonférence. Pour chaque triangle conjugué à la conique on décrit ainsi une circonférence; toutes ces circonférences ont le même centre radical. (MANNHEIM.)

Ainsi se trouve résolue la question 744 (t. IV, p. 430).

Pour donner un autre exemple, nous savons que le lieu des points d'où l'on voit une conique sous un angle droit est un cercle; ensuite nous avons démontré (*voir* le journal *l'Institut* du 20 décembre 1865) qu'il existe deux points dans le plan de tout quadrilatère, d'où l'on voit sous un angle droit chacune des coniques qui lui sont inscrites; en d'autres termes, les cercles analogues pour toutes ces coniques ont même axe radical. Transformant ces énoncés d'après ce qui précède, nous aurons les suivants :

Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les droites qui interceptent dans une conique des cordes vues de ce point sous un angle droit est un cercle. Si la conique varie en passant par quatre points fixes, tous les cercles ainsi obtenus ont même axe radical.

L'idée fondamentale est donc de remplacer dans un énoncé une conique, polaire réciproque d'un cercle, par son cercle correspondant. Ainsi le cercle A, lieu des points d'où l'on voit une conique sous un angle droit, se transforme en un autre défini par l'énoncé précédent, et comme c'est lui qui coupe orthogonalement tout cercle circonscrit à un triangle conjugué à la conique, il en résulte que dans la question 744 le centre radical dont nous avons démontré l'existence est le centre du cercle lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point donné sur toutes les droites interceptant dans la conique donnée des cordes vues de cé point sous un angle droit. Il est assez curieux de voir par cette méthode des cercles qui ont même centre radical se transformer en des cercles jouissant de la même propriété : c'est ce qui explique l'utilité du § V. Si l'axe radical était commun, la même chose aurait lieu, la propriété se conserverait. D'ailleurs cette nouvelle espèce de transformation est réciproque; car, si après avoir transformé un cercle en un autre, on veut transformer à son tour ce dernier, on retombe sur le premier.

VIII. Il est aisé de voir que les considérations précédentes peuvent s'étendre au cas de l'espace. Il suffit de remplacer les coniques confocales par des surfaces du second degré de révolution ayant un foyer commun, et les cercles par des sphères. Ainsi obtient-on les énoncés suivants :

Le lieu des centres des surfaces du second degré de révolution ayant un foyer commun et tangentes à deux paraboloïdes de révolution confocaux avec elles se compose des plans bissecteurs des plans tangents aux sommets de ces paraboloïdes.

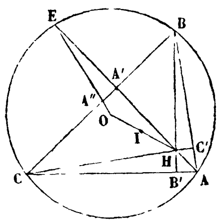
Le lieu des centres des surfaces du second degré de révolution ayant un foyer commun, tangentes à une autre confocale avec elles, et ayant un grand axe donné, se compose de deux sphères concentriques à la surface donnée et ayant pour rayon le grand axe de cette surface augmenté ou diminué du grand axe donné.

Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les plans qui coupent une surface du second degré suivant des courbes bases de cônes équilatères $(A + A' + A'' = 0)$ *ayant pour sommet ce point, est une sphère. Si la surface varie en passant par huit points fixes, toutes les sphères ainsi obtenues ont même plan radical; si la surface varie en passant par sept points fixes, elles ont même axe radical.*

On donne une surface du second degré et un point, on abaisse de ce point des perpendiculaires sur les quatre faces d'un tétraèdre conjugué à la surface, et par les pieds de ces perpendiculaires on fait passer une sphère. Toutes les sphères analogues ont même centre radical, qui est le centre du cercle lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point donné sur les plans qui coupent la surface donnée suivant une courbe base d'un cône équilatère ayant pour sommet le point donné.

IX. Les mêmes considérations permettent de résoudre les questions 737 et 738. Soient en effet un cercle et un point H fixe : nous allons démontrer que tous les triangles qui sont inscrits dans le cercle et qui ont ce point pour point de rencontre des hauteurs enveloppent une même ellipse ayant un foyer en H et l'autre foyer au centre du cercle, si le point H est à l'intérieur du cercle. Il suffit de faire voir que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point H sur les trois côtés du triangle est un

Fig. 2.



cercle; en effet, soit ABC un de ces triangles : ces trois pieds A', B', C' seront les pieds des hauteurs, et le cercle qu'ils définissent sera évidemment le même pour tous les triangles, car le point A' est le milieu de HE et le lieu de ces milieux est un cercle dont le centre est au milieu I de HO. L'enveloppe des côtés du triangle est donc une ellipse ayant un foyer en H, son centre en I et l'autre foyer en O : par conséquent, le cercle O est le cercle directeur de cette ellipse, puisque chacun de ses points s'obtient en abaissant du foyer H des perpendiculaires sur les tangentes à l'ellipse et les prolongeant d'une quantité égale à elles-mêmes. Nous avons donc le centre, les foyers et le grand axe de l'ellipse. Nous voyons en outre que si un triangle est à la fois circonscrit à cette ellipse et inscrit dans son cercle directeur, il aura nécessairement le point H pour point de rencontre des hauteurs; soit en effet A'' un des points de contact, joignons OA'' et abaissons EA' perpendiculaire sur CB; cette droite passera par l'autre foyer qui sera symétrique de E par rapport à CB; comme il en est de même pour les autres côtés du triangle, ce foyer se confond avec son point de rencontre des hauteurs. Ces deux questions ont une autre signification géométrique. Nous savons en effet :

1° *Que lorsqu'on peut placer sur un cône du second degré un trièdre trirectangle, on peut en placer une infinité.*

En transformant cet énoncé par la théorie des polaires réciproques, on arrive au suivant :

2° *Lorsqu'on peut circonscrire à un cône du second degré un trièdre trirectangle, on peut lui en circonscrire une infinité.*

On a souvent attribué indistinctement à ces deux espèces de cônes la dénomination de *cônes équilatères*, parce que pour les premiers la somme des coefficients des carrés des variables est nulle, et pour les seconds la somme des carrés des axes. Il nous semble qu'on peut les distinguer en appelant les uns cônes équilatères de première espèce, les autres cônes équilatères de seconde espèce (*voir* l'*Institut* du 20 décembre 1865). Cela posé, considérons un cône appartenant à la première espèce, dont S soit le sommet, et coupons-le suivant un cercle; si l'on prend sur ce cercle trois points A, B, C correspondant aux arêtes d'un trièdre trirectangle, le triangle ABC variera en restant inscrit dans le cercle, et il est facile de voir qu'il conservera toujours le même point de rencontre des hauteurs H, projection du point S sur le plan du cercle; donc ses côtés envelopperont une ellipse ayant pour foyer le point H, et le cône ayant cette ellipse pour base et le point S pour sommet appartiendra à la seconde espèce (dont l'existence serait démontrée par là même si nous ne la connaissions pas déjà), et aura la ligne SH pour ligne focale, puisqu'une section perpendiculaire à SH a un foyer en son point d'intersection avec cette ligne. Donc ces deux cônes, qui ont même sommet, sont tels, que les plans cycliques du premier sont perpendiculaires aux lignes focales de l'autre, et cette propriété est réciproque parce qu'alors les cônes sont supplémentaires, ce qui est d'ailleurs évident sur la figure, car l'arête SA'' de l'un est évidemment perpendiculaire à l'arête SA de l'autre.

Donc :

Lorsqu'un trièdre trirectangle se meut de façon que ses arêtes engendrent un cône du second degré, ses faces enveloppent un autre cône supplémentaire du premier.

Ces deux cônes sont équilatères l'un d'une espèce, l'autre de l'autre. Puisque les plans cycliques de l'un sont perpendiculaires aux lignes focales de l'autre, en transportant l'un d'eux parallèlement d'une façon convenable, on pourra toujours s'arranger de manière qu'une section convenable de l'un d'eux soit la courbe polaire réciproque de l'autre par rapport à une sphère qui aurait son centre au sommet du premier (*voir* les *Recherches de Géométrie pure* de M. Chasles, Mémoire publié à Bruxelles, en 1829). C'est ce qui explique encore pourquoi la théorie des polaires réciproques permet de tirer les propriétés de l'un de ces cônes des propriétés de l'autre.