NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 142-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__142_1>

CORRESPONDANCE.

M. AMIGUES, *élève de l'École Normale.* — « Parmi les méthodes de discussion de l'équation en λ relative à l'intersection de deux coniques, il en est une dont le succès paraît aller croissant et que je me fais un devoir de vous signaler, parce qu'elle me semble vicieuse.

» Voici en quoi elle consiste. Après avoir établi qu'on a toujours deux sécantes réelles communes aux deux coniques, on suppose que ces deux droites sont prises pour axes, et, dans ce système de coordonnées, on forme l'équation $f(\lambda) = 0$, pour laquelle on établit dès lors très-simplement que toutes les racines sont réelles si les quatre points communs aux deux coniques sont tous réels ou tous imaginaires, et qu'une seule de ces racines est réelle si deux de ces points sont réels et les deux autres imaginaires.

» Ceci est incontestable. Mais ce qu'on se propose dans cette discussion, c'est d'établir que cette propriété appartient non-seulement à l'équation particulière $f(\lambda) = 0$, à laquelle donne lieu le système d'axes choisi, mais à toutes les équations $F(\lambda) = 0$ qui répondent à un système d'axes quelconque.

» Or les coefficients de $F(\lambda)$ sont des fonctions des coefficients des deux coniques, et ces derniers eux-mêmes dépendent du choix des axes. Il faudrait donc, pour compléter la démonstration, établir qu'un changement d'axes, tout en modifiant les coefficients et les racines de l'équation $F(\lambda) = 0$, ne peut faire changer le nombre des racines réelles de cette équation.

» A la vérité, si λ représentait un élément géométrique, pas ne serait besoin de prendre cette peine; car la réalité de cet élément ne dépendrait que des données de la figure, et l'on pourrait alors, pour simplifier, prendre des axes particuliers. Mais ici ce n'est pas le cas, et c'est ce que me paraissent n'avoir pas observé ceux qui accordent leur confiance à cette méthode. »

Note du Rédacteur. — L'observation de M. Amigues est fort juste, et d'ailleurs il peut arriver que l'une des deux sécantes réelles ou toutes les deux soient à l'infini;

et alors, comment prendre ces deux droites pour axes?

Voici comment on peut lever la difficulté. Soient

$$P = o, \quad Q = o$$

les équations des deux coniques, et

$$P + \lambda Q = RS = o$$

l'équation de l'ensemble de deux droites réelles ou imaginaires passant par les quatre points communs aux deux courbes. Si l'on change d'axes, ces équations deviendront

$$P' = o, \quad Q' = o, \quad P' + \lambda' Q' = R' S' = o.$$

Or, si RS est réel, il en sera de même de $R'S'$; et si RS est imaginaire, $R'S'$ sera imaginaire. D'un autre côté, λ, λ' seront réels ou imaginaires, selon que RS ou $R'S'$ seront réels ou imaginaires. Donc λ et λ' seront en même temps réels ou imaginaires. Par conséquent, relativement à la réalité des racines de l'équation en λ, peu importera le système d'axes auxquels on rapportera la courbe. On pourra donc prendre pour axes les deux sécantes communes réelles dont on a démontré l'existence quand les quatre points d'intersection sont à des distances finies. Le cas des points à l'infini se déduira du cas général par des considérations de limites.

On pourrait encore former les trois équations analogues à $RS = o$, au moyen des coordonnées des quatre points d'intersection, et, sans recourir à une transformation, examiner successivement les résultats obtenus dans le cas de quatre points réels, de deux réels, de quatre imaginaires ; on verrait que les trois valeurs de RS sont réelles dans les deux premiers cas, et qu'il y en a deux imaginaires dans le dernier. P.