Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 132-142
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__132_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 490

(voir tome XVIII, page 443);

PAR M. VENCESLAS NIEBYLOWSKI,
Elève de spéciales au lycée Bonaparte.

Étant donné un cône du second degré, trouver le lieu d'où ce cône est vu sous un angle donné.

Je prends le sommet du cône pour origine, et pour axes de coordonnées les axes mêmes du cône. Son équation est alors

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0.$$

Soit

$$\left\{\begin{array}{l} x = mz, \\ y = nz \end{array}\right.$$

une droite passant par le sommet du cône.

Exprimons que les deux plans tangents au cône et passant par cette droite font l'angle donné, et d'abord que le plan

$$x - mz + K(y - nz) = 0 \text{ (K indéterminée)}$$

ou

$$x + Ky - (m + Kn)z = 0$$

est tangent au cône.

On a pour équation de condition

$$A(A'n^2 + A'')K^2 + 2AA'mnK + A'(Am^2 + A'') = 0.$$

Soient K' et K'' les racines de cette équation, on a alors pour équations des plans tangents

$$x + K'y - (m + K'n)z = 0,$$
$$x + K''y - (m + K''n)z = 0,$$

d'où

$$\cos V = \frac{1 + K'K'' + (m + K'n)(m + K''n)}{\sqrt{[1 + K'^2 + (m + K'n)^2][1 + K''^2 + (m + K''n)^2]}},$$

$$\cos^2 V\,[1 + K'^2 + (m + K'n)^2][1 + K''^2 + (m + K''n)^2]$$
$$= [1 - K'K'' + (m + K'n)(m + K''n)]^2,$$

$$\cos^2 V\,[(m^2 + 1) + 2mnK' + (n^2 + 1)K'^2]$$
$$\times[(m^2 + 1) + 2mnK'' + (n^2 + 1)K''^2]$$
$$= [(m^2 + 1) + mn(K' + K'') + (n^2 + 1)K'K'']^2;$$

or le produit des deux facteurs entre crochets est égal à

$$[(m^2 + 1) + mn(K' + K'') + (n^2 + 1)K'K'']^2$$
$$+ (m^2 + n^2 + 1)(K' - K'')^2;$$

donc

$$\cos^2 V\,(m^2 + n^2 + 1)(K' - K'')^2$$
$$= [m^2 + 1 + mn(K' + K'') + (n^2 + 1)K'K'']^2 \sin^2 V;$$

mais

$$K' + K'' = -\frac{2mnAA'}{A(A'n^2 + A'')}, \quad K'K'' = \frac{A'(Am^2 + A'')}{A(A'n^2 + A'')},$$
$$(K' - K'')^2 = \frac{-4AA'A''(Am^2 + A'n^2 + A'')}{A^2(A'n^2 + A'')^2}.$$

Substituant dans l'équation de la courbe, il vient

$$\frac{-4AA'A''(m^2 + n^2 + 1)(Am^2 + A'n^2 + A'')}{A^2(A'n^2 + A'')^2}$$
$$= \tang^2 V\left[m^2 + 1 - \frac{2m^2n^2AA'}{A(A'n^2 + A'')} + \frac{A'(Am^2 + A'')(n^2 + 1)}{A(A'n^2 + A'')}\right]^2.$$

Simplifions : on obtient

$$4AA'A''(m^2+n^2+1)(Am^2+A'n^2+A'')$$
$$+\tang^2 V[A(A'+A'')m^2+A'(A+A'')n^2+A''(A+A')]^2=0;$$

or

$$m=\frac{x}{z},\quad n=\frac{y}{z};$$

donc l'équation du lieu est

$$4AA'A''(x^2+y^2+z^2)(Ax^2+A'y^2+A''z^2)$$
$$+\tang^2 V[A(A'+A'')x^2+A'(A+A'')y^2+A''(A+A')z^2]^2=0.$$

Le lieu est donc un cône du quatrième degré dont le sommet est à l'origine.

Si $V=90$ degrés, le lieu est un cône du second degré,

$$A(A'+A'')x^2+A'(A+A'')y^2+A''(A+A')z^2=0.$$

Ce cône a même sommet que le cône donné et ses axes ont la même direction que les axes du cône donné.

Question 501

(voir tome XIX, page 44);

PAR MM. DESQ ET GRASSAT.

Par un point fixe M *pris sur une conique, on mène une tangente; soit* T *un point quelconque pris sur cette droite,* TN *une seconde tangente,* N *le point de contact; au point* T *on élève une perpendiculaire sur la tangente* TN; *elle sera rencontrée en* R *par la perpendiculaire abaissée de* N *sur la tangente fixe* TM. *Quel est le lieu du point* R?

Je prends pour axe des Y la tangente MT; pour axe des X la normale au point M; l'équation de la conique sera

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = 0.$$

La tangente au point N (α, β) aura pour équation

$$(2A\beta + B\alpha)y + (B\beta + 2C\alpha + E)x + E\alpha = 0.$$

Donc l'ordonnée du point T est

$$-\frac{E\alpha}{2A\beta + B\alpha};$$

par suite, l'équation de TR est

$$Y + \frac{E\alpha}{2A\beta + B\alpha} = \frac{2A\beta + B\alpha}{B\beta + 2C\alpha + E}x;$$

celle de NR est

$$y = \beta.$$

On a de plus

$$A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + E\alpha = 0,$$

et on obtiendra l'équation du lieu en éliminant α et β entre ces trois équations, c'est-à-dire α entre

$$C\alpha^2 + (By + E)\alpha + Ay^2 = 0$$

et

$$[2Ay^2 + \alpha(By + E)](2C\alpha + By + E) = x(2Ay + B\alpha)^2$$

ou

$$\alpha^2[B^2x - 2C(By + E)] + \alpha[4ABxy - 4ACy^2 - B(y+E)^2] \\ + 2Ay^2(2Ax - By - E) = 0.$$

Or, lorsqu'on a deux équations du deuxième degré,

$$M\alpha^2 + N\alpha + P = 0,$$
$$M'\alpha^2 + N'\alpha + P' = 0,$$

le résultat de l'élimination de α entre ces deux équations est

$$(MP' - PM')^2 = (MN' - NM')(NP' - PN').$$

Dans le cas actuel,

$$\begin{aligned}
MP' - PM' &= Ay^2[2C(2Ax - By - E) - B^2x + 2C(By + E)] \\
&= - Axy^2(B^2 - 4AC),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
NP' - PN' &= Ay^2\{2(By + E)[2Ax - (By + E)] - 4ABxy \\
&\qquad + (By + E)^2 + 4ACy^2\} \\
&= - Ay^2[y^2(B^2 - 4AC) - 4AEx + E(2By + E)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MN' - NM' &= C[4ABxy - (By + E)^2 - 4ACy^2] \\
&\quad - (By + E)[B^2x - 2C(By + E)] \\
&= (Cy^2 - Bxy)(B^2 - 4AC) - B^2Ex + CE(2By + E).
\end{aligned}$$

Donc l'équation du lieu demandé est

$$\begin{aligned}
&A^2x^2y^4(B^2 - 4AC)^2 \\
&\quad = - Ay^2[y^2(B^2 - 4AC) - 4AEx + E(2By + E)] \\
&\qquad \times [(Cy^2 - Bxy)(B^2 - 4AC) - B^2Ex + CE(2By + E)];
\end{aligned}$$

il se décompose en $y^2 = 0$, c'est-à-dire la normale au point M, et

$$\begin{aligned}
&Ax^2y^2(B^2 - 4AC)^2 + [y^2(B^2 - 4AC) - 4AEx + E(2By + E)] \\
&\quad \times [(Cy^2 - Bxy)(B^2 - 4AC) - B^2Ex + CE(2By + E)] = 0.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que cette équation, du quatrième degré en général, se décompose dans le cas de la parabole en

$$2By + E - 4Ax = 0,$$

$$C(2By + E) - B^2x = 0.$$

Cette dernière, en tenant compte de $B^2 = 4AC$, est identique à la première; donc, dans ce cas, le lieu se réduit à la droite double

$$2By - 4Ax + E = 0,$$

ce qui représente, comme on le sait, la directrice de la parabole, résultat très-remarquable (*).

Question 618

(voir 2ᵉ série, t. I, p. 169);

PAR M. JACQUES BELLACHI.

La courbe parallèle à la podaire d'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

a pour équation

$$(\alpha\beta - \gamma)^2 = 4(\alpha^2 - \beta)(\beta^2 - \alpha\gamma),$$

en posant

$$\alpha = \frac{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - k^2) - a^2b^2}{3a^2b^2(x^2 + y^2 - k^2)},$$

$$\beta = \frac{(x^2 + y^2 - k^2)^2 + (a^2 + b^2)k^2 - a^2x^2 - b^2y^2}{2a^2b^2(x^2 + y^2 - k^2)^2},$$

$$\gamma = \frac{a^2b^2(x^2 + y^2 - k^2)^2}{k^2}.$$

(STREBOR.)

Je considère la courbe parallèle, à l'exemple de M. Salmon, comme le lieu des centres (X, Y) des cercles tangents à la courbe donnée et d'un rayon k; je substitue à la podaire de l'ellipse une conique variable avec chaque point de cette courbe, et qui touche cette courbe au même point. Son équation, comme il est facile de s'en assurer, est

$$(2Xx + 2Yy - A)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0,$$

(*) Dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole, la courbe a deux asymptotes parallèles à l'axe des x, c'est-à-dire à la normale. Dans le cas de l'hyperbole, il y a en outre deux asymptotes perpendiculaires à celles de l'hyperbole. P.

en posant

$$X^2 + Y^2 - k^2 = A.$$

La condition pour que le cercle

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 - k^2 = 0$$

soit tangent à la conique s'obtient en égalant à zéro le discriminant de la fonction quadratique

$$\begin{aligned}(2Xx + 2Yy - A)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 \\ + \lambda[(x - X)^2 + (y - Y)^2 - k^2)] = 0,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}(2A + \lambda)^2[\lambda(Y^2 + X^2) - a^2Y^2 - b^2X^2] \\ - (\lambda A + A^2)[\lambda^2 + \lambda(4X^2 + 4Y^2 - a^2 - b^2) \\ - 4b^2X^2 - 4a^2y^2 + a^2b^2] = 0,\end{aligned}$$

ou, en développant et réduisant,

$$\begin{aligned}k^2\lambda^3 + [A(a^2 + b^2) - A^2 - a^2Y^2 - b^2X^2]\lambda^2 \\ + [A^2(a^2 + b^2) - Aa^2b^2]\lambda - a^2b^2A^2 = 0,\end{aligned}$$

ou, en remarquant que $A = X^2 + Y^2 - k^2$, et par conséquent

$$A(a^2 + b^2) - a^2Y^2 - b^2X^2 = a^2X^2 + b^2Y^2 + (a^2 + b^2)k^2,$$

l'équation devient, après réduction,

$$\begin{aligned}\frac{k^2}{a^2b^2A^2}\lambda^3 + 3\,\frac{a^2X^2 + b^2Y^2 - (a^2 + b^2)k^2 - A^2}{3a^2b^2A^2}\lambda^2 \\ + 3\,\frac{A(a^2 + b^2) - a^2b^2}{3Aa^2b^2} - 1 = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\gamma\lambda^3 - 3\beta\lambda^2 + 3\alpha\lambda - 1 = 0.$$

L'égalité de deux racines de cette équation est la condition de tangence qui est donnée en égalant à zéro le discriminant de la fonction homogène du troisième degré. On aura

$$(\alpha\beta-\gamma)^2=4(\beta^2-\alpha\gamma)(\alpha^2-\beta),$$

comme le trouve M. Strebor. En changeant b^2 en $-b^2$ on aurait la courbe parallèle à la podaire de l'hyperbole. Un procédé analogue donnera l'équation de la surface parallèle à la surface podaire d'un ellipsoïde.

Question 747

(voir 2e série, t. IV, p. 428),

PAR M. DURANTON.

Quelle est l'enveloppe du plan mené perpendiculairement à l'extrémité du diamètre d'un ellipsoïde, lorsque cette extrémité décrit une circonférence?

(CATALAN.)

Cette question rentre dans ce problème plus général que nous allons résoudre :

Trouver l'enveloppe du plan mené perpendiculairement à l'extrémité du rayon vecteur issu d'un point fixe et aboutissant à une circonférence donnée?

Nous ferons usage de coordonnées rectangulaires, l'origine étant au point fixe et le plan de la circonférence parallèle à celui des xy; nous déterminerons d'ailleurs la circonférence par l'intersection de son plan avec la surface d'une sphère passant par le point fixe; ses équations seront ainsi

$$x^2+y^2+z^2-2(ax+by+cz)=0, \tag{1}$$

$$z-h=0, \tag{2}$$

a, b, c étant les coordonnées du centre de la sphère.

On aura de même pour équations du rayon vecteur,

λ et μ étant des variables,

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \lambda z, \\ y = \mu z. \end{cases}$$

Ce rayon rencontre la circonférence au point dont les coordonnées sont

$$x = \lambda h, \quad y = \mu h, \quad z = h.$$

Comme ce point doit être sur la sphère, on a l'équation de condition

$$(4)\qquad (\lambda^2 + \mu^2 + 1) h - 2(a\lambda + b\mu + c) = 0.$$

On trouve d'autre part pour équation du plan mené par ce même point à l'extrémité du rayon vecteur

$$(5)\qquad \lambda x + \mu y + z - h(\lambda^2 + \mu^2 + 1) = 0.$$

Au moyen de la relation (4) on peut, dans cette expression, considérer λ comme fonction de μ; si l'on égale à zéro la dérivée prise à ce point de vue, on obtient

$$(x - 2h\lambda)\frac{b - h\mu}{h\lambda - a} + y - 2h\mu = 0$$

ou bien

$$(6)\qquad h(y - 2b)\lambda - h(x - 2a)\mu = ay - bx.$$

Pour avoir l'enveloppe cherchée, il ne reste plus qu'à éliminer λ et μ entre (4), (5), et (6). Afin de faciliter, nous remplacerons l'une des équations (4) ou (5) par celle qu'on obtient en éliminant entre elles $\lambda^2 + \mu^2$; on aura ainsi

$$(7)\qquad (x - 2a)\lambda + (y - 2b)\mu = 2c - z.$$

Posons, pour abréger,

$$x - 2a = x_1, \quad y - 2b = y_1, \quad z - 2c = z_1, \quad ay - bx = u.$$

Les équations (6) et (7) ainsi modifiées donnent

$$\lambda = \frac{uy_1 - hx_1 z_1}{2h(x_1^2 + y_1^2)}, \quad \mu = \frac{-(hy_1 z_1 + ux_1)}{2h(x_1^2 + y_1^2)},$$

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{u^2 + h^2 z_1^2}{4h^2(x_1^2 + y_1^2)}.$$

En substituant ces valeurs dans (4), on a, après transformations et réductions faciles,

$$(8) \quad \begin{cases} 4h(h - 2c)(x_1^2 + y_1^2) + h^2 z_1^2 + u^2 \\ \quad - 4h(ay_1 - bx_1)u + 4h(ax_1 z_1 + by_1 z_1) = 0, \end{cases}$$

où il ne reste plus qu'à remplacer x_1, y_1, z_1 et u par leurs valeurs. Or on peut se dispenser de faire cette substitution; il suffit pour cela de transporter les axes parallèlement à eux-mêmes au point dont les coordonnées sont

$$(9) \qquad x = 2a, \quad y = 2b, \quad z = 2c;$$

les indices disparaissent alors dans (8) et u reste égal à $ay - bx$. L'équation de l'enveloppe cherchée devient ainsi

$$(10) \quad \begin{cases} 4h(h - 2c)(x^2 + y^2) + h^2 z^2 \\ \quad - 3(ay - bx)^2 + 4h(axz + byz) = 0. \end{cases}$$

Cette équation, homogène par rapport à x, y, z, est celle d'un cône du second degré.

Discussion. — 1° Les coordonnées (9) du sommet, par rapport à l'ancienne origine, étant $2a$, $2b$, $2c$, et celles du centre de la sphère, a, b, c, il en résulte que *le sommet du cône enveloppe est diamétralement opposé au point fixe, sur la sphère qui passe par ce point et par la circonférence donnée.*

2° Si l'on a $a = 0$ et $b = 0$, le point fixe est sur la perpendiculaire au plan de la circonférence qui passe par le centre ; l'équation (10), qui devient

$$4(h-2c)(x^2+y^2)+hz^2=0,$$

montre que le cône enveloppe est de révolution. Donc il est oblique, pour toute autre position du point fixe.

3° Si le point fixe est dans le plan de la circonférence, $h=0$, le sommet s'éloigne à l'infini, de même que le centre de la sphère, et l'enveloppe devient un cylindre droit dont la section est égale à la circonférence donnée. C'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier en traitant directement la question à ce point de vue.

Remarque. — Pour résoudre la question selon l'énoncé de M. Catalan, on rapportera l'ellipsoïde à trois axes rectangulaires, dont deux soient situés dans une section circulaire diamétrale; les équations de départ seront alors

$$x^2+y^2+mz^2+2nxz-b^2=0,$$
$$z-h=0,$$

et l'on continuera comme ci-dessus.

Il est évident que, dans cette question, les deux hyperboloïdes et le paraboloïde elliptique peuvent être substitués à l'ellipsoïde.

Note. — MM. Niebylowski, O. Puel, Mercè Busco ont traité la même question.