Nouvelles annales de mathématiques

Lecocq

Construction d'un cercle osculateur d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 130-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__130_1>

CONSTRUCTION D'UN CERCLE OSCULATEUR D'UNE CONIQUE;

PAR M. LECOCQ,
Maître répétiteur au lycée Saint-Louis.

Soient OBAC une conique quelconque; OX, OY la tangente et la normale au point O de cette conique. D'un point arbitraire I pris sur OY, décrivons avec IO comme rayon une circonférence qui coupe la conique en deux points A et B; démontrer que :

1° La corde commune AB a une direction constante;

2° Les bissectrices DR, DS des angles qu'elle forme avec la tangente sont parallèles aux axes de la courbe;

3° Si l'on mène OC parallèle à AB et qu'on élève MH perpendiculaire au milieu de la corde OC, le point H sera le centre et OH le rayon de courbure pour le point O.

Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + y = 0 \tag{1}$$

l'équation de la conique donnée par rapport à la tangente OX et à la normale OY, et

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + 2uy = 0$$

l'équation du cercle OBA ; on en déduit

$$(3) \qquad (A - C)y^2 + Bxy + (1 - 2Cu)y = 0,$$

équation qui représente les deux droites OX et AB. L'équation de cette dernière droite est donc

$$(4) \qquad (A - C)y + Bx + (1 - 2Cu) = 0.$$

On voit que son coefficient angulaire $\frac{-B}{A - C}$ est indépendant du rayon u du cercle, et que sa valeur est celle de tang 2α, α étant l'angle de l'un des axes de la courbe avec OX, ce qui démontre les deux premières parties de l'énoncé.

Il résulte de là que tout cercle qui passera par le point O et par les points de rencontre de la conique avec une parallèle à AB sera tangente en O à OX. Mais si l'on prend pour cette parallèle la droite OC, le cercle, n'ayant plus qu'un point de rencontre C avec la conique, en a trois autres communs avec elle au point O; donc il sera le cercle osculateur (1).

(*) Le théorème de M. Lecocq revient à celui que M. Chasles donne sous le n° 11 dans son Mémoire sur les lignes conjointes, en indiquant qu'il peut servir à construire le cercle osculateur (*Journal de M. Liouville*, t. III, p. 385).