NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

QAHER BEY

Sur la résolution de l'équation transcendante $a^x + b^x = c^x$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 129-130

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__129_0>

SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION TRANSCENDANTE
$$a^x + b^x = c^x$$

(voir 2e série, t. IV, p. 454);

PAR M. QAHER BEY.

On a

$$a^x + b^x = c^x,$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 1,$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x = \sin^2\varphi, \quad \left(\frac{b}{c}\right)^x = \cos^2\varphi,$$

$$x\log\frac{a}{c} = 2\log\sin\varphi, \quad x\log\frac{b}{c} = 2\log\cos\varphi,$$

$$\frac{\log\frac{a}{c}}{\log\frac{b}{c}} = \frac{\log\sin\varphi}{\log\cos\varphi}.$$

Soit

$$m = \frac{\log\frac{a}{c}}{\log\frac{b}{c}},$$

une quantité facile à calculer :

$$\frac{\log\sin\varphi}{\log\cos\varphi} = m,$$

$$\log\sin\varphi = m\log\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi = \cos^m\varphi,$$

$$\sin^2\varphi = \cos^{2m}\varphi.$$

Il en résulte

$$\cos^{2m}\varphi + \cos^2\varphi - 1 = 0.$$

C'est une équation à trois termes que l'on résout comme on veut, avec la formule de Lagrange, par exemple.

Alors

$$x = \frac{2 \log \cos \varphi}{\log \frac{b}{c}}.$$

Note du rédacteur. — Ce calcul suppose a et b moindres que c. Si l'on avait $a < c$, $b < c$, il suffirait de poser $x = -y$, et l'on aurait à résoudre l'équation

$$\left(\frac{1}{a}\right)^y + \left(\frac{1}{b}\right)^y = \left(\frac{1}{c}\right)^y$$

qui rentre dans le cas examiné par M. Qâher-Bey.