G.-G. DE LONGCHAMPS

Étude de géométrie comparée, avec applications aux sections coniques et aux courbes d'ordre supérieur, particulièrement à une famille de courbes du sixième ordre et de la quatrième classe

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 118-128

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__118_1>

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE,

Avec applications aux sections coniques et aux courbes d'ordre supérieur, particulièrement à une famille de courbes du sixième ordre et de la quatrième classe;

PAR M. G.-G. DE LONGCHAMPS,
Élève de l'École Normale supérieure.

La méthode de Géométrie comparée que j'expose ici repose sur le théorème suivant, conséquence évidente du théorème relatif à une transversale dans un triangle et de la réciproque.

1° Une transversale étant donnée dans le plan d'un triangle, on prend les symétriques, par rapport aux points milieux des côtés du triangle, des points où ces côtés sont rencontrés par la transversale; les trois points ainsi obtenus sont en ligne droite.

Ces deux droites, tellement liées l'une à l'autre que la seconde se déduise de la première et inversement, peuvent être appelées *transversales réciproques*. Si l'on considère les segments de ces transversales compris entre deux mêmes côtés du triangle et qu'on appelle les *segments correspondants*, on énoncera ce théorème :

2° La droite qui joint les points milieux de deux segments correspondants passe par le milieu de la médiane correspondant au sommet de l'angle considéré.

3° La transversale réciproque est parallèle à la droite qui joint les points milieux du quadrilatère complet que forme la transversale proposée avec le triangle. Ces points milieux et les points où la transversale réciproque rencontre les côtés du triangle forment deux systèmes de points homothétiques ; le centre de gravité du triangle est centre d'homothétie.

4° Étant données trois transversales se coupant deux à deux sur les côtés d'un triangle donné, les transversales réciproques forment également un triangle dont les sommets reposent sur les côtés du triangle donné, et ces deux triangles, savoir : celui des transversales et celui des transversales réciproques, jouissent de la propriété que la droite qui joint leurs centres de gravité passe par le centre de gravité du triangle donné et y est partagée en deux parties égales.

Tous ces théorèmes sont assez élémentaires pour que nous puissions nous dispenser de les démontrer ici. Avant d'aller plus loin dans cette théorie, je cite dès à présent l'application qu'on peut faire des théorèmes précédents à la recherche de la loi qui unit les centres de gravité des divers triangles qui composent un polygone complet, c'est-à-dire un polygone dont les côtés sont indéfiniment prolongés.

On déduit, en effet, du dernier théorème énoncé ce corollaire :

Si l'on considère les deux systèmes de trois points formés par les côtés du triangle donné sur la transversale et sa réciproque, la droite qui joint les centres de gravité de ces deux systèmes de points passe constamment par le centre de gravité du triangle donné et y est partagée en deux parties égales.

On déduit de là le théorème suivant :

Si l'on considère un quadrilatère complet, ce quadrilatère définit quatre triangles que l'on obtient en faisant successivement abstraction d'une des droites données. Que l'on considère l'un de ces triangles en particulier et que l'on joigne son centre de gravité au centre de gravité du système des trois points qui se trouvent sur la quatrième droite, les quatre droites que l'on peut ainsi obtenir concourent en un même point et y sont partagées en deux parties égales.

Ce point situé sur la droite qui joint les points milieux des diagonales, et qui se trouve être le centre de gravité de ces trois points, peut être appelé, en n'attachant à ce mot qu'un sens purement géométrique, le centre de gravité du quadrilatère complet. En se laissant guider par quelques idées générales semblables à celles qui m'ont servi (*) dans une recherche analogue sur les centres des cercles circonscrits aux triangles formés par un polygone complet, on arrive au théorème général que j'énonce :

Si l'on considère un polygone complet de n droites définissant n polygones de $(n-1)$ droites, que l'on joigne le centre de gravité d'un de ces polygones (point défini par cette même loi que nous énonçons en ce moment) au centre de gravité des $(n-1)$ points qui se trouvent sur la $n^{\text{ième}}$ droite dont on vient de faire abstraction, les n droites ainsi obtenues concourent au même point et y sont partagées dans le rapport de $n-2$ à 2.

(*) *Revue des Sociétés savantes*, mai 1864.

Mais, sans insister davantage sur ce point, j'expose les principes qui font de ces théorèmes la base d'une nouvelle méthode de déformation des figures. On sait que tout théorème de Géométrie élémentaire, dans lequel à un point ou à une droite correspond un point ou une droite, peut servir de point de départ à une méthode de Géométrie comparée, et ces idées ont été exposées dernièrement dans les *Annales* par M. Mathieu. C'est ici le premier théorème qui servira de point de départ, en faisant correspondre une droite à une droite, ainsi que nous l'avons expliqué en commençant. Si on fait tourner une droite autour d'un point et que l'on cherche l'enveloppe des transversales réciproques, l'équation homographique du point se change en l'équation homographique d'une conique, de telle sorte qu'on peut dire qu'à un point correspond une conique.

Mais le point ne renfermant que deux paramètres arbitraires, la conique, on le comprend bien, doit être assujettie à remplir trois conditions. On reconnaît, en effet, qu'elle est tangente aux trois côtés du triangle qui sert à la déformation, et que suivant un langage usité nous appellerons désormais triangle de référence. Les théorèmes énoncés plus haut, et le théorème de Newton, font voir que le point et la conique corrélative sont liés par une loi simple :

Un point a pour corrélatif une conique tangente aux trois côtés du triangle de référence, et inversement une telle conique a pour corrélative un point : ce point, le centre de gravité du triangle et le centre de la conique sont trois points en ligne droite, et le rapport des distances de ces trois points est celui de 2 à 1.

La simplicité de cette loi fait tout le succès de ce mode de déformation des figures. On peut dire que les conséquences nombreuses, et souvent simples, que l'on en peut déduire sont renfermées dans ce théorème ou dans son corollaire que j'énonce :

Si deux points dans la figure proposée sont situés sur une même tangente à une certaine conique tangente aux trois côtés du triangle de référence, les centres des coniques corrélatives de ces points sont situés sur une même tangente à une certaine conique tangente aux droites qui joignent les points milieux du triangle de référence.

Je donne quelques exemples. Comme il ne sera considéré dans ce qui va suivre que des coniques toujours tangentes à trois droites, ces trois conditions seront sous-entendues, et nous dirons par exemple : soit C (Oa_1, Oa_2) une conique tangente aux droites Oa_1, Oa_2, ou encore C (Oa_1, Oa_1) une conique tangente à Oa_1 au point O.

1° Étant donnés un point fixe O, trois droites auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler, et deux droites Oa_1, Oa_2 partant du point O, on considère les trois coniques C (Oa_1, Oa_1), C (Oa_2, Oa_2), C (Oa_1, Oa_2). La droite qui joint le centre de cette dernière au point milieu de la distance des centres des deux premières passe par un point fixe quand les droites Oa_1, Oa_2 varient de toutes les manières possibles. Ce point partage la distance du point fixe au centre de gravité du triangle dans le rapport de 2 à 1.

2° Étant données trois droites concourantes Oa_1, Oa_2, Oa_3 et trois droites auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler, on considère les deux coniques C (Oa_1, Oa_2) et C (Oa_3, Oa_3) et la droite qui joint leurs centres. Les trois droites qu'on peut ainsi obtenir concourent au même point.

3° Etant données quatre droites concourantes Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4 et trois droites auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler, on considère les six coniques $\Sigma C (Oa_1, Oa_2)$ dont les centres, situés trois à trois en ligne droite, forment un quadrilatère complet. La droite qui joint les points milieux des diagonales de ce quadrilatère passe par un point fixe quand les droites concourantes tournent autour du point O d'une façon quelconque.

Les propriétés métriques d'une figure donnée se retrouvent sans altération dans la figure corrélative; ainsi, le théorème sur la cinquième tangente mobile à une conique qui en rencontre quatre autres fixes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant donne pour corrélatif ce théorème :

4° Étant données trois droites auxquelles seront tangentes les diverses coniques dont nous allons parler et quatre droites Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4 concourantes, on considère une cinquième droite Oa mobile autour du point O et les quatre coniques $\Sigma C (Oa, Oa_1)$; ces quatre coniques, on le sait, ont leurs centres en ligne droite, comme tangentes à quatre mêmes droites : le rapport anharmonique de ces quatre points est constant quand varie la droite Oa.

On en déduit ce corollaire :

Étant données quatre droites concourantes Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4, on considère les six coniques $\Sigma C (Oa_1, Oa_2)$. Il y a sur chacune de ces droites trois points de contact; si l'on considère deux des systèmes de ces points, les droites qui les joignent deux à deux concourent au même point.

Je borne là ces exemples, suffisants, je crois, pour faire apercevoir l'esprit de la méthode, et avant de dire quelques mots de l'application de cette méthode aux courbes du sixième ordre, je cite quelques théorèmes bien faciles à démontrer et dont chacun peut donner lieu à une méthode de Géométrie comparée.

1° Étant donné un triangle, on en joint les sommets aux milieux des segments correspondants formés par les côtés de ce triangle sur une transversale, et l'on prolonge ces droites d'une quantité égale : les trois points ainsi obtenus sont en ligne droite.

2° Étant donné un triangle, on joint les points milieux de ses côtés aux points milieux des segments déterminés par le triangle sur une transversale ; si l'on prend les points milieux de ces droites, les trois points ainsi déterminés sont en ligne droite.

3° Si d'un point on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle, et qu'on prenne les symétriques des pieds de ces perpendiculaires par rapport aux points milieux des côtés du triangle, et qu'en ces nouveaux points on élève des perpendiculaires aux côtés du triangle, ces trois droites concourent au même point.

Ce théorème se démontre plus généralement pour trois directions choisies de façon que les parallèles à ces directions menées par les points milieux des côtés du triangle concourent au même point.

4° Si l'on joint les trois sommets d'un triangle à un point quelconque de son plan, et qu'on prenne, par rapport aux points milieux des côtés du triangle, les symétriques des points où ces droites rencontrent ces côtés ; que l'on joigne enfin les points ainsi obtenus aux sommets du triangle, les trois droites concourent au même point.

On peut constater que les droites des deux premiers théorèmes enveloppent des courbes semblables à celles qui sont fournies par la méthode de déformation que j'expose en ce moment ; le troisième théorème ne fournit rien, car la droite qui joint les deux points inverses passe constamment par le centre du cercle circonscrit et y est partagée en deux parties égales, de telle sorte que les figures sont simplement déplacées et non déformées, comme il importe qu'elles le soient. Le dernier de ces théorèmes, qui fait correspondre un point à un point et réciproquement, réalise géométriquement la transformation analytique que M. Magnus a développée en 1831 dans le *Journal de Crelle*. On peut vérifier pour le cas présent et par la Géométrie les résultats qu'a démontrés généralement M. Magnus, savoir : que dans une telle transformation, à une droite correspond une conique passant par trois points fixes, et à une courbe de l'ordre n correspond généralement une courbe de l'ordre $2n$. On trouve en effet qu'à une droite correspond une conique circonscrite au triangle de référence ; à une conique prise d'une façon quelconque, une courbe du quatrième ordre ayant généralement pour points multiples d'ordre 2 (réels ou imaginaires) les sommets du triangle de référence. Cette méthode, pour le dire en passant, peut ajouter une solution de plus aux nombreuses solutions de la construction par points d'une conique donnée par cinq points ; mais, à part quelques applications de ce genre et un petit nombre de théorèmes qu'elle peut fournir, elle ne semble pas féconde, parce qu'on ne voit pas facilement une loi géométrique bien simple qui unisse deux points inverses à la figure de référence.

Je reviens à la méthode que je développe plus spécialement et que j'ai annoncée comme conduisant à l'étude d'une famille de courbes d'ordre supérieur. Le théorème général s'énonce :

Une courbe du degré m et de la classe n a pour corrélative une courbe de la classe $2n$ et du degré $2m+n$ ayant trois tangentes multiples d'ordre n qui sont les côtés du triangle de référence.

Ce théorème se démontre simplement de la manière suivante :

Soit A la courbe proposée, A′ la courbe corrélative ;

soit m' un point. Nous nous proposons de trouver combien on peut mener de tangentes à la courbe A′ par le point m'. Ce point m' a pour corrélative une conique tangente aux trois côtés du triangle de référence, c'est-à-dire une courbe de la classe 2 ayant $2n$ tangentes communes avec la courbe A; il y a donc $2n$ droites passant par le point m' et tangentes à A′, c'est-à-dire que la classe de A′ est égale à $2n$.

Cherchons l'ordre de cette courbe A′, c'est-à-dire combien de points de cette courbe sont situés sur une droite L′; or L′ a pour corrélative une droite L, et il y aura sur L′ autant de points (réels ou imaginaires) que l'on pourra mener de coniques tangentes aux trois côtés du triangle de référence, à la droite L et à la courbe A. M. Chasles a énoncé ce théorème général dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de l'année dernière, que dans un système dont les caractéristiques sont μ et ν il existe $m\mu + n\mu$ coniques tangentes à une courbe de la classe n et de l'ordre m. Ici en particulier les caractéristiques du système de quatre droites étant 2 et 1, il y a $2m + n$ de ces coniques dont nous cherchions le nombre, et ceci démontre le théorème.

On vérifie sans peine, en considérant les n tangentes qui partent d'un sommet du triangle de référence à la courbe A, qu'il y a n points de contact de la courbe A′ sur le côté opposé.

Ceci suppose, bien entendu, que la courbe A n'a aucune relation avec la figure de référence, et on peut reconnaître que le degré de la courbe A′ s'abaisse d'une, de deux ou de trois unités quand la courbe A passe par un, deux ou trois sommets du triangle de référence. En appliquant ces considérations à la section conique, on obtient donc généralement une courbe du sixième ordre et de la quatrième classe, qui peut s'abaisser quant à son ordre, au cinquième, au quatrième et au troisième ordre. En particulier, dans le cas de la courbe du troisième ordre, on reconnaît que les côtés du triangle de référence sont les tangentes en ses points d'inflexion, et que ces trois points sont en ligne droite, ce qui est une propriété connue de ces courbes.

Je donne en finissant quelques propriétés de ces courbes du sixième ordre :

1° Les six points de contact de la courbe avec ses tangentes doubles sont six points d'une même conique.

2° Les tangentes doubles rencontrent la courbe chacune en deux autres points (réels ou imaginaires) ; ces six points sont six points d'une même conique.

3° Le lieu des centres des coniques tangentes à la courbe et à ses trois tangentes doubles est une conique.

Cette conique joue un grand rôle dans les propriétés de ces courbes dont elle semble être un élément important.

4° Les points où cette conique coupe les côtés du triangle qui joignent les points milieux des côtés du triangle formé par les tangentes doubles et les points où la courbe coupe ses tangentes doubles sont deux à deux en ligne droite avec les sommets du triangle des tangentes doubles.

On peut encore démontrer que ces courbes ont généralement quatre points multiples d'ordre 2 et six asymptotes. Les points multiples en particulier jouissent de propriétés simples et intéressantes. Tout théorème sur les sections coniques donne pour corrélatif un théorème sur ces courbes. Les nombreuses propriétés qu'on peut ainsi déduire des propriétés connues des coniques peuvent être considérées comme des corollaires de cette proposition :

Si dans la figure proposée deux points sont situés sur une même tangente à une section conique, les centres des coniques corrélatives sont situés sur une même tangente à la conique donnée par le théorème III.

Ainsi, en transformant le théorème qui dit que la droite qui joint un point au milieu de la corde de contact passe par un point fixe, centre de la conique considérée, on a :

1° Si l'on considère deux tangentes Oa, O'a' à cette courbe aux points O et O' et les coniques C (Oa, Oa), C (O'a', O'a'), C (Oa, O'a') assujetties en outre à être tangentes aux tangentes doubles de la courbe, la droite qui joint le centre de la dernière au point milieu de la droite qui joint les centres des deux premières passe par un point fixe quand Oa et O'a' varient de toutes les manières possibles.

2° Si l'on considère trois tangentes Oa, O'a', O''a'' à cette courbe et les coniques C (Oa, Oa), C (O'a', O''a'') assujetties en outre à être tangentes aux trois tangentes doubles, et que l'on joigne le centre de la dernière au centre de la première, les trois droites que l'on peut ainsi obtenir par des combinaisons analogues concourent au même point.

Je ne multiplie pas ces exemples, qu'on peut indéfiniment poursuivre en leur conservant une simplicité comparable à celle du théorème des coniques que l'on emploie pour la transformation. On peut se demander si cette famille de courbes du sixième ordre ne se rencontre pas dans la recherche des lieux géométriques. M. Chasles a démontré que dans un système (μ, ν) le lieu des centres des coniques est une courbe de l'ordre ν; en particulier, le lieu des centres des coniques tangentes à trois droites et à une conique est une courbe du sixième ordre. Ces courbes sont précisément celles que nous venons d'étudier.