NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. PICQUET

# Note sur quelques propriétés du lieu des centres des coniques assujetties à quatre conditions, ou des surfaces du second degré assujetties à sept ou à huit conditions

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 4 (1865), p. 66-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__66_1>

# NOTE

## sur quelques propriétés du lieu des centres des coniques assujetties à quatre conditions, ou des surfaces du second degré assujetties à sept ou à huit conditions ;

PAR M. H. PICQUET,
Elève de l'École Polytechnique.

1. Le lieu des centres des coniques qui passent par quatre points est une conique qui passe par les milieux des côtés du quadrilatère ayant ces quatre points pour sommets et par les points de rencontre des côtés opposés, en tout neuf points, en considérant les diagonales du quadrilatère comme deux côtés opposés. C'est la conique des neuf points du quadrilatère. Il en résulte que si une conique est déterminée par cinq points, lesquels considérés quatre à quatre forment cinq quadrilatères, son centre devant se trouver à la fois sur les cinq coniques des neuf points, ces cinq coniques passeront par un même point, centre de la conique déterminée par les cinq points donnés. Donc :

THÉORÈME I. — *Les cinq coniques des neuf points des cinq quadrilatères auxquels donnent lieu cinq points* *quelconques, considérés quatre à quatre, passent par un même point.*

2. D'après ce que nous venons de dire, la conique des neuf points d'un quadrilatère est circonscrite au parallélogramme qui a pour sommets les milieux des côtés du quadrilatère ; elle a donc pour centre le centre de ce parallélogramme. Il est facile d'après cela de vérifier par une figure que le pentagone des cinq centres est semblable au pentagone des cinq points donnés et semblablement placé, et que le rapport de similitude est $\frac{1}{4}$. Donc :

Théorème II. — *Les cinq centres des cinq coniques des neuf points des cinq quadrilatères auxquels donnent lieu cinq points quelconques, considérés quatre à quatre, sont les sommets d'un pentagone semblable au pentagone de ces cinq points, et semblablement placé, le rapport de similitude étant* $\frac{1}{4}$.

3. Si les cinq points donnés sont sur une même hyperbole équilatère H, l'un d'eux est inutile pour la déterminer et nous pouvons le négliger. Les trois autres, considérés trois à trois, forment quatre triangles, dans chacun desquels le cercle des neuf points est le lieu des centres des hyperboles équilatères qui lui sont circonscrites. Le centre de l'hyperbole H devant se trouver à la fois sur les quatre cercles des neuf points, ces quatre cercles passeront par un même point, centre de l'hyperbole. Donc :

Théorème III. — *Les quatre cercles des neuf points des quatre triangles ayant pour sommets quatre points quelconques, considérés trois à trois, passent par un même point.*

Ce dernier théorème est énoncé par M. Matthieu (t. II, p. 476), qui fait remarquer également que l'hyperbole passera par les quatre points de rencontre des hauteurs des quatre triangles. On peut observer encore que, si l'on opère sur ces quatre points comme sur les quatre premiers, on aura quatre autres points de l'hyperbole, et ainsi de suite indéfiniment, ce qui fournit le moyen de construire par points une hyperbole équilatère dont on connaît quatre points. Donc :

Théorème IV. — *Étant donnés quatre points, ils forment quatre triangles dont on peut construire les quatre points de rencontre des hauteurs, de même ces quatre derniers, et ainsi de suite. Le lieu de tous ces points est l'hyperbole équilatère déterminée par les quatre points donnés, et tous les cercles des neuf points des triangles formés par tous ces points passent par un même point.*

4. Les deux derniers théorèmes, transformés par la méthode des polaires réciproques, donnent lieu à deux théorèmes assez intéressants. Prenons pour courbe directrice un cercle, et cherchons d'abord la transformée de la figure formée par un triangle, le point de rencontre des hauteurs, et le cercle des neuf points. Un triangle se transforme en un triangle ABC; soit O le pôle de transformation : si l'on joint OA et si l'on mène O$\alpha$ perpendiculaire à OA jusqu'au point de rencontre avec BC, on obtient un point $\alpha$ qui est en ligne droite avec les deux points analogues $\beta$, $\gamma$, et la droite $\alpha\beta\gamma$ est la polaire du point de rencontre des hauteurs du premier triangle. Donc :

Théorème V. — *Étant donnés un triangle* ABC *et un point* O *dans son plan, on joint* OA, *on mène* O$\alpha$ *perpendiculaire sur* OA *jusqu'au point de rencontre* $\alpha$ *avec* BC; *ce point et deux autres points analogues* $\beta$, $\gamma$ *sont en ligne droite.*

Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent aux cercles inscrit et exinscrits. Ces derniers se transforment en quatre coniques ayant pour foyer le point O et circonscrites au triangle ABC. On sait en effet qu'il y a toujours quatre coniques ayant pour foyer un point donne et passant par trois points. Le cercle des neuf points se transformera dans ce cas en une conique ayant pour foyer le même point O et tangente aux quatre précédentes. Donc :

Théorème VI. — *Étant donné un triangle, il existe quatre coniques ayant pour foyer un point donné et circonscrites au triangle; il en existe une cinquième ayant pour foyer le même point et tangente aux quatre premières.*

Pour plus de simplicité, appelons cette conique et la droite $\alpha\beta\gamma$ la conique et la droite dérivées du triangle ABC, il est facile de transformer maintenant les théorèmes III et IV.

Théorème VII. — *Les quatre coniques dérivées des quatre triangles formés par quatre droites quelconques considérées trois à trois ont une tangente commune.*

Théorème VIII. — *Étant données quatre droites, elles forment quatre triangles dont on peut construire les quatre droites dérivées pour un même point O, de même pour ces quatre dernières, et ainsi de suite. L'enveloppe de toutes ces droites est une conique, et toutes les coniques dérivées des triangles formés par toutes ces droites sont tangentes à une même droite.*

5. Revenons à notre sujet, et supposons qu'une conique soit déterminée par cinq points. Si les cinq points sont sur un même cercle, les cinq coniques des neuf points sont des hyperboles équilatères. On sait en effet que lorsque deux droites passent par les points d'intersection d'un cercle et d'une conique, elles sont également

inclinées sur les axes de la conique. Considérons alors quatre points sur un même cercle, et les deux paraboles qui passent par ces quatre points (car ils forment un quadrilatère convexe); elles ont leurs centres à l'infini respectivement sur chaque bissectrice de l'angle formé par deux côtés opposés quelconques du quadrilatère des quatre points : les trois systèmes de deux bissectrices sont en effet parallèles, d'après la propriété connue du quadrilatère inscriptible. Il en résulte que le lieu des centres des coniques qui passent par les quatre points est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices d'un même angle, et par suite équilatère. Si l'on a cinq points, les cinq hyperboles équilatères passeront par le centre du cercle. Donc :

Théorème IX. — *La conique des neuf points d'un quadrilatère inscriptible est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par deux côtés opposés quelconques du quadrilatère.*

Ce théorème fait l'objet de la seconde partie de la question 625, et une première solution en a été donnée (t. III, p. 265).

6. Si les cinq points sont sur une même parabole, les cinq coniques des neuf points ont une direction asymptotique commune. S'ils sont distribués sur deux droites parallèles, les cinq coniques des neuf points se composent d'un système de deux droites, à chacun desquels appartient la droite équidistante des deux droites parallèles sur lesquelles sont distribués les cinq points.

### *Extension à l'espace.*

1. Le lieu des centres des surfaces du second degré

qui passent par huit points distincts est la cubique gauche du système de ces huit points. Si donc une surface du second degré est déterminée par neuf points distincts, ces neuf points donnent lieu à neuf systèmes de huit points, et par suite à neuf cubiques gauches qui passeront toutes par un même point, centre de la surface du second degré déterminée par les neuf points donnés. Donc :

Théorème X. — *Les neuf cubiques gauches des neuf systèmes de huit points fournis par neuf points distincts passent par un même point.*

2. Le lieu des centres des surfaces du second degré qui passent par sept points est une surface du troisième degré. Soient en effet

$$S = 0, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0$$

les équations de trois des surfaces du second degré passant par les sept points, l'équation de l'une quelconque d'entre elles sera

$$\lambda S + \mu S_1 + \nu S_2 = 0,$$

et son centre sera donné par les équations

$$\begin{aligned} \lambda S'_x + \mu S'_{1x} + \nu S'_{2x} &= 0, \\ \lambda S'_y + \mu S'_{1y} + \nu S'_{2y} &= 0, \\ \lambda S'_z + \mu S'_{1z} + \nu S'_{2z} &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant $\lambda$, $\mu$, $\nu$, il vient

$$\begin{vmatrix} S'_x & S'_{1x} & S'_{2x} \\ S'_y & S'_{1y} & S'_{2y} \\ S'_z & S'_{1z} & S'_{2z} \end{vmatrix} = 0,$$

équation d'une surface du troisième degré. Nous pouvons en déterminer vingt-huit points, car si par six des points donnés nous faisons passer une surface du second degré qui ait pour centre le milieu de la droite qui joint l'un d'eux au septième, elle passera par le septième; donc le point milieu de cette droite appartient au lieu des centres; de plus, toutes les surfaces représentées par l'équation

$$\lambda S + \mu S_1 + \nu S_2 = 0$$

passent par un huitième point fixe, et comme il y a vingt-huit droites qui joignent huit points deux à deux, nous obtenons ainsi vingt-huit points du lieu des centres que nous appellerons alors la surface des vingt-huit points du système des sept points donnés. Supposons donc qu'une surface du second degré soit déterminée par neuf points distincts, ces neuf points donnent lieu à trente-six systèmes de sept points, et, par suite, à trente-six surfaces des vingt-huit points, qui passeront toutes par un même point, centre de la surface du second degré déterminée par les neuf points donnés. Donc :

THÉORÈME XI. — *Les trente-six surfaces des vingt-huit points des trente-six systèmes de sept points fournis par neuf points distincts passent par un même point.*

3. Toutes les surfaces du second degré qui passent par sept points ont un huitième point commun. Il en résulte que si une surface du second degré est déterminée par neuf points, on pourra en connaître trente-six autres, lesquels en fourniront $\frac{36.35.34...30}{1.2...7}$ autres, et ainsi de suite. Les surfaces des ving-huit points de tous les systèmes de sept points auxquels ils peuvent donner lieu passeront toujours par le même point. Il est vrai que le huitième point n'est pas déterminé géométriquement, de sorte que tout ceci est plutôt théorique que pratique.

4. Supposons que les neuf points ne soient pas quelconques, mais qu'ils soient sur une même ligne à double courbure, intersection de deux surfaces du second degré; nous pouvons négliger l'un d'eux. Alors nous pouvons déterminer la surface du second degré par une autre condition quelconque; dans tous les cas, la cubique gauche des huit points donnés et les huit surfaces des vingt-huit points des huit systèmes de sept points auxquels ils donnent lieu passeront par un même point, centre de la surface. Au moyen des huit points donnés on pourra également en déterminer huit autres, et ainsi de suite.

5. Si l'un des huit points est le point fixe par où passent toutes les surfaces du second degré qui contiennent les sept autres, nous pouvons le négliger dans ce cas. On connaît alors sept points de la surface, et son centre est sur une surface du troisième degré, surface des vingt-huit points du système des sept points donnés. Les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre sont dans ce cas; toutes les surfaces du second degré qui passent par sept d'entre eux passent par le huitième et sont toutes des hyperboloïdes équilatères; de même que dans le plan toutes les coniques qui passent par trois des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits à un triangle passent par le quatrième point de rencontre des hauteurs du triangle des trois autres, et sont toutes des hyperboles équilatères. Il en résulte donc ce théorème, que les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre sont sur une même surface du troisième degré. M. Beltrami l'a énoncé et proposé le premier; mon camarade Max Cornu et moi nous l'avons démontré (*Nouvelles Annales*, 2$^e$ série, t. III, p. 225)

par un calcul très-pénible que pouvaient remplacer, comme on le voit, quelques lignes d'explication. Cette surface est la surface des vingt-huit points du système des centres des huit sphères. La proposition qui précède est un cas particulier de la suivante, démontrée précédemment.

THÉORÈME XII. — *Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux huit points non distincts sont sur une surface du troisième degré.*

6. Nous voyons que cette surface a, par rapport au système des huit centres, une propriété analogue à celle du cercle des neuf points du triangle de trois des centres par rapport au système des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits à un triangle. *Elle en a peut-être d'autres.* M. A. S., qui a envoyé une seconde solution de la question 663, a fait voir que, par rapport au tétraèdre circonscrit aux huit sphères, elle jouit d'une propriété analogue à celle du cercle circonscrit à un triangle, savoir :

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la surface sur les quatre faces du tétraèdre sont dans un même plan.

Nous savons d'autre part que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer d'un paraboloïde de révolution sur les plans tangents est le plan tangent au sommet ; il en résulte que si nous considérons un tétraèdre circonscrit à un paraboloïde de révolution, le foyer appartiendra au lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de l'un d'eux sur les quatre faces du tétraèdre sont dans un même plan. Donc :

THÉORÈME XIII. — *Étant donné un paraboloïde de révolution et quatre plans tangents, le lieu des centres* *des surfaces du second degré qui passent par les centres des huit sphères inscrites dans ces quatre plans passe par le foyer du paraboloïde.*

En d'autres termes, le foyer d'un paraboloïde de révolution est le centre d'une surface du second degré qui passe par les centres des huit sphères inscrites dans quatre plans tangents au paraboloïde. Si le paraboloïde est déterminé par six plans tangents, qui, considérés quatre à quatre, forment quinze tétraèdres, les quinze surfaces analogues passeront par son foyer. Donc :

Théorème XIV. — *Étant donnés six plans qui, considérés quatre à quatre, forment quinze tétraèdres, dans chacun d'eux il existe une surface lieu des centres des surfaces du second degré qui passent par les centres des huit sphères qui lui sont inscrites; ces quinze surfaces passent par un même point.*

A ces dernières propositions correspondent les théorèmes de Géométrie plane connus :

Quand un triangle est circonscrit à une parabole, le cercle circonscrit à ce triangle passe par le foyer.

Les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles de quatre droites quelconques, considérées trois à trois, passent par un même point, foyer de la parabole tangente aux quatre droites.