

A. PICART

Étude géométrique sur les surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 4
(1865), p. 62-66

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__62_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LES SURFACES ;

PAR M. A. PICART,
Professeur au lycée Charlemagne.

I. — INTRODUCTION.

1. *Si l'on considère une série d'ellipses homofocales et qu'on mène par un point pris sur l'un des axes des tangentes à toutes ces ellipses, le lieu des points de contact est une circonférence.*

2. *Si l'on prend un point P sur l'un des axes et un point Q sur l'autre, les circonférences relatives à ces deux points se coupent orthogonalement.*

3. *Si l'on fait varier la position des points P et Q sur les deux axes, on obtient deux systèmes de cercles orthogonaux.*

II. — SURFACES HOMOFOCALES.

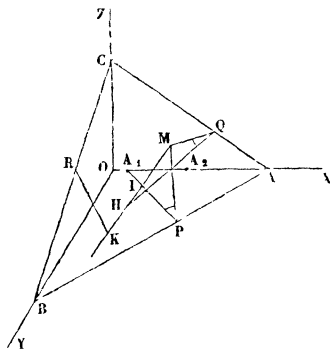
4. *Si l'on considère un système d'ellipsoïdes homo-*

focaux et que par une droite AB située dans l'un des plans principaux on mène des plans tangents à tous ces ellipsoïdes, le lieu des points de contact est une circonférence.

En effet, les normales en ces différents points rencontrent le plan principal en un même point I, qui est le pôle de la droite AB par rapport à la conique excentrique située dans ce plan principal (M. CHASLES, *Aperçu historique*). (Cela résulte immédiatement d'une propriété essentielle et caractéristique des surfaces homofocales qui peut servir de point de départ à une théorie géométrique de ces surfaces, savoir : *Les pôles d'un même plan, par rapport à une série de surfaces homofocales, sont situés sur une même droite perpendiculaire à ce plan.*)

5. *A trois droites AB, BC, CA situées respectivement dans les trois plans principaux, et rencontrant les axes aux points A, B, C, correspondent trois circonférences qui se coupent deux à deux orthogonalement.*

FIG. 1.



Soit, en effet, M (*fig. 1*) le point de contact du plan ABC avec l'un des ellipsoïdes homofocaux, et I, H, K

les points où la normale en M rencontre les trois plans principaux. Abaissons de ces trois points des perpendiculaires IP, HQ, KR sur AB, AC et BC. La circonférence relative à la droite AB est décrite sur IP comme diamètre dans un plan perpendiculaire à XOY; la circonférence relative à AC est décrite sur HQ comme diamètre dans un plan perpendiculaire à XOZ; et enfin la circonférence relative à BC est décrite sur KR comme diamètre dans un plan perpendiculaire à YOZ.

La normale MI coupe la première circonférence sous un angle α égal à MPI; cette même droite coupe la deuxième circonférence sous un angle β égal à MQH. Si l'on désigne par V l'angle de ces deux circonférences, le trièdre formé par la droite MI et les tangentes en M aux deux circonférences donne

$$(1) \quad \cos V = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos PMQ.$$

Mais l'angle PMQ est supplémentaire de PAQ, et, dans le trièdre rectangle qui a pour arêtes AO, AB, AC, on a

$$(2) \quad \cos PAQ = \cot \alpha \cot \beta,$$

donc

$$\cos V = 0 :$$

l'angle V est droit, ce qu'il fallait démontrer.

6. *Si du point A on circonscrit des cônes à tous les ellipsoïdes homofocaux, les courbes de contact de ces cônes formeront une certaine surface. Si, de même, des deux points B et C on circonscrit des cônes à ces ellipsoïdes, on aura deux autres surfaces. Ces trois surfaces se coupent deux à deux suivant des cercles.*

Considérons, en effet, deux cônes ayant pour sommets A et B et circonscrits à un même ellipsoïde; et soit M

l'un des points d'intersection de leurs courbes de contact. Le plan MAB est tangent en M à cet ellipsoïde ; donc, d'après le n° 4, la circonférence qui a pour diamètre IP est l'intersection des surfaces relatives aux points A et B. On verrait, de même, que le cercle qui a pour diamètre HQ est l'intersection des surfaces relatives à A et à C, et que le cercle qui a pour diamètre KR est l'intersection des surfaces relatives à B et à C. Or, il vient d'être démontré, n° 5, que ces trois cercles se coupent deux à deux orthogonalement ; donc, les plans tangents en M aux trois surfaces sont perpendiculaires entre eux.

7. *Si l'on fait varier la position des points A, B et C, respectivement sur les trois axes, on aura trois familles de surfaces se coupant orthogonalement.*

Ce système triple orthogonal a été découvert par M. W. Roberts dans un travail intéressant *sur quelques systèmes de surfaces orthogonales obtenus par la méthode des coordonnées elliptiques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LIII, 23 septembre 1861).

La méthode géométrique qui précède a l'avantage de déduire directement ce système, par des considérations tout élémentaires, des propriétés les plus simples des surfaces du second degré homofocales.

8. Ces trois familles de surfaces orthogonales se coupent mutuellement, d'après le théorème de M. Dupin, suivant leurs lignes de courbure ; or, nous avons vu, n° 6, que leurs intersections sont des cercles ; ce sont donc des surfaces à *lignes de courbure circulaires*.

9. Si l'on considère l'une de ces surfaces, celle qui est relative au point A, par exemple, on reconnaîtra facilement que les lignes de courbure d'un système de cette surface sont dans des plans perpendiculaires à XOY et

passant par un même point A_1 de l'axe OX , et que les lignes de courbure de l'autre système sont dans des plans perpendiculaires à XOZ et passant par un point fixe A_2 de ce même axe OX . Cela résulte d'une propriété bien connue des sections coniques, savoir : *lorsqu'une droite située dans le plan d'une conique tourne autour de son point d'intersection avec l'un des axes, la perpendiculaire, abaissée sur cette droite de son pôle par rapport à la conique, rencontre l'axe en un point fixe.*

(*La suite prochainement.*)