Nouvelles annales de mathématiques

H. Lemonnier

Considérations sur les équations du second degré à deux et trois variables

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 5-25
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

CONSIDÉRATIONS SUR LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A DEUX ET TROIS VARIABLES;

PAR M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Napoléon.

SECONDE PARTIE.

I. Les coordonnées d'un point par rapport à des axes ox, oy, oz faisant entre eux les angles φ, ψ, ω étant x, y, z, celles du même point par rapport à des axes de même origine faisant entre eux les angles Φ, Ψ, Ω étant X, Y, Z, soit

$$\begin{aligned} & ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy \\ & = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'XZ + 2B''XY. \end{aligned}$$

Comme on a identiquement

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\varphi + 2xz\cos\psi + 2xy\cos\omega \\ & = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\Phi + 2XZ\cos\Psi + 2XY\cos\Omega, \end{aligned}$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}&(a+\lambda)x^2+(a'+\lambda)y^2+(a''+\lambda)z^2+2(b+\lambda\cos\varphi)yz\\&\quad+2(b'+\lambda\cos\psi)xz+2(b''+\lambda\cos\omega)xy\\&=(A+\lambda)X^2+(A'+\lambda)Y^2+(A''+\lambda)Z^2+2(B+\lambda\cos\Phi)YZ\\&\quad+2(B'+\lambda\cos\Psi)XZ+2(B''+\lambda\cos\Omega)XY.\end{aligned}$$

Si l'on détermine λ de telle façon que le premier membre soit le produit de deux fonctions entières en x, y, z, le second membre sera également le produit de deux fonctions entières en X, Y, Z.

De là deux équations ayant les mêmes racines; ce sont :

$$\begin{aligned}&(a+\lambda)(b+\lambda\cos\varphi)^2+(a'+\lambda)(b'+\lambda\cos\psi)^2\\&+(a''+\lambda)(b''+\lambda\cos\omega)^2-(a+\lambda)(a'+\lambda)(a''+\lambda)\\&-2(b+\lambda\cos\varphi)(b'+\lambda\cos\psi)(b''+\lambda\cos\omega)=0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(A+\lambda)(B+\lambda\cos\Phi)^2+(A'+\lambda)(B'+\lambda\cos\Psi)^2\\&+(A''+\lambda)(B''+\lambda\cos\Omega)^2-(A+\lambda)(A'+\lambda)(A''+\lambda)\\&-2(B+\lambda\cos\Phi)(B'+\lambda\cos\Psi)(B''+\lambda\cos\Omega)=0.\end{aligned}$$

Développées, ces équations deviennent

$$m\lambda^3-n\lambda^2-p\lambda+\delta=0,$$
$$M\lambda^3-N\lambda^2-P\lambda+\Delta=0.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned}m&=1-\cos^2\varphi-\cos^2\psi-\cos^2\omega+2\cos\varphi\cos\psi\cos\omega,\\n&=a\sin^2\varphi+a'\sin^2\psi+a''\sin^2\omega+2b\,(\cos\psi\cos\omega-\cos\varphi)\\&\qquad+2b'(\cos\varphi\cos\omega-\cos\psi)\\&\qquad+2b''(\cos\varphi\cos\psi-\cos\omega),\\p&=b^2-a'a''+b'^2-a''a+b''^2-aa'\\&\qquad+2(ab-b'b'')\cos\varphi+2(a'b'-b''b)\cos\psi\\&\qquad+2(a''b''-bb')\cos\omega,\\-\delta&=ab^2+a'b'^2+a''b''^2-aa'a''-2bb'b'',\end{aligned}$$

et pareillement

$$
\begin{aligned}
M &= 1 - \cos^2\Phi - \cos^2\Psi - \cos^2\Omega + 2\cos\Phi\cos\Psi\cos\Omega,\\
N &= A\sin^2\Phi + A'\sin^2\Psi + A''\sin^2\Omega\\
&\qquad + 2B\,(\cos\Psi\cos\Omega - \cos\Phi)\\
&\qquad + 2B'(\cos\Omega\cos\Phi - \cos\Psi)\\
&\qquad + 2B''(\cos\Phi\cos\Psi - \cos\Omega),\\
P &= B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A + B''^2 - AA'\\
&\qquad + 2(AB - B'B'')\cos\Phi\\
&\qquad + 2(A'B' - B''B)\cos\Psi\\
&\qquad + 2(A''B'' - BB')\cos\Omega,\\
-\Delta &= AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'',
\end{aligned}
$$

les coefficients de ces équations sont proportionnels, donc

$$
(1) \qquad \frac{m}{M} = \frac{n}{N} = \frac{p}{P} = \frac{\delta}{\Delta}.
$$

Nous avons ainsi trois relations. Nous pouvons en faire dépendre des développements analogues à ceux que nous avons présentés dans la première partie de ce travail.

Remarquons avant tout que si les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, ces relations se réduisent à

$$
(1') \qquad \left\{
\begin{aligned}
&a + a' + a'' = A + A' + A'',\\
&b^2 - a'a'' + b'^2 - a''a + b''^2 - aa'\\
&\quad = B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A - B''^2 - AA',\\
&ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''\\
&\quad = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''.
\end{aligned}
\right.
$$

On voit par là que les coefficients de l'équation en s ne changent pas quand les axes coordonnés se changent en d'autres rectangulaires comme les premiers. C'est ce qu'on déduit souvent de considérations différentes.

Les relations (1) pourraient s'établir elles-mêmes au moyen de l'équation en s formée pour des axes obliques.

II. *Théorèmes d'Apollonius étendus aux surfaces du second degré.*

Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

l'équation d'un ellipsoïde rapporté à ses axes, et soit

$$\frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}+\frac{Z^2}{c'^2}-1=0$$

l'équation de cette surface par rapport à trois diamètres conjugués qui font entre eux les angles φ, ψ, ω. Les relations (1) appliquées à ces équations deviennent

$$\frac{1-\cos^2\varphi-\cos^2\psi-\cos^2\omega+2\cos\varphi\cos\psi\cos\omega}{1}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin^2\varphi}{a'^2}+\dfrac{\sin^2\psi}{b'^2}+\dfrac{\sin^2\omega}{c'^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\frac{\dfrac{1}{a'^2b'^2}+\dfrac{1}{b'^2c'^2}+\dfrac{1}{c'^2a'^2}}{\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{1}{b^2c^2}+\dfrac{1}{c^2a^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{a'^2b'^2c'^2}}{\dfrac{1}{a^2b^2c^2}}.$$

Donc

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2,$$

$$a'^2b'^2c'^2(1-\cos^2\varphi-\cos^2\psi-\cos^2\omega+2\cos\varphi\cos\psi\cos\omega)$$
$$=a^2b^2c^2$$

et

$$b'^2c'^2\sin^2\varphi+c'^2a'^2\sin^2\psi+a'^2b'^2\sin^2\omega=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2,$$

c'est-à-dire que :

1° La somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante;

2° Le parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués a un volume constant;

3° La somme des carrés des faces est constante.

Ces théorèmes s'étendent aux deux hyperboloïdes.

III. Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

l'équation d'une surface du second degré ayant un centre, et soient Φ, Ψ, Ω les angles des axes coordonnés.

Si l'origine est transportée au centre (α, β, γ), l'équation deviendra

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + \frac{L}{\Delta} = 0,$$

en désignant

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D \quad \text{par} \quad \frac{L}{\Delta}:$$

on a comme ci-dessus (p. 7)

$$-\Delta = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''$$

ou

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

En conséquence,

$$L = -C \begin{vmatrix} C & B'' & B' \\ C' & A' & B \\ C'' & B & A'' \end{vmatrix} - C' \begin{vmatrix} A & C & B' \\ B'' & C' & B \\ B' & C'' & A'' \end{vmatrix}$$
$$- C'' \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} + D \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

d'où

$$L = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Je passe de là à un système d'axes formé par trois diamètres conjugués faisant entre eux les angles φ, ψ, ω. L'équation de la surface se change en

$$aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 + \frac{L}{\Delta} = 0.$$

Les carrés des trois demi-diamètres positifs ou négatifs étant désignés par u, v, w, nous aurons

$$au + \frac{L}{\Delta} = 0, \quad a'v + \frac{L}{\Delta} = 0, \quad a''w + \frac{L}{\Delta} = 0,$$

et les relations du n° I donneront

$$\frac{M}{m} = \frac{N}{-\frac{L}{\Delta}\left(\frac{\sin^2\varphi}{u} + \frac{\sin^2\psi}{v} + \frac{\sin^2\omega}{w}\right)}$$

$$= \frac{P}{-\frac{L^2}{\Delta^2}\left(\frac{1}{uv} + \frac{1}{vw} + \frac{1}{wu}\right)} = \frac{\Delta}{-\frac{L^3}{\Delta^3}\,\frac{1}{uvw}},$$

d'où l'on tire

$$uvw = -\frac{M}{m}\,\frac{L^3}{\Delta^4},$$

$$u + v + w = P\,\frac{L}{\Delta^2}$$

et

$$\frac{\sin^2\varphi}{u} + \frac{\sin^2\psi}{v} + \frac{\sin^2\omega}{w} = -\frac{m}{M}\,\frac{\Delta}{L}\,N.$$

Supposons que les trois diamètres conjugués soient les axes de la surface.

Alors la dernière de ces trois équations donnera

$$uv + vw + wu = \frac{L^2}{\Delta^3} N.$$

En conséquence, u, v, w, carrés des demi-axes, seront les racines de l'équation

$$V^3 - P\frac{L}{\Delta^2}V^2 + \frac{L^2}{\Delta^3}NV + M\frac{L^3}{\Delta^4} = 0.$$

IV. Soient données deux équations

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz$$
$$+ 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz$$
$$+ 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0,$$

qui représentent deux ellipsoïdes ou deux hyperboloïdes égaux rapportés, le premier à des axes faisant entre eux les angles Φ, Ψ, Ω, le second à des axes dont les angles sont φ, ψ et ω.

D'après l'équation obtenue ci-dessus, les deux surfaces seront égales, si l'on a

$$P\frac{L}{\Delta^2} = p\frac{l}{\delta^2}, \quad \frac{L^2}{\Delta^3}N = \frac{l^2}{\delta^3}n$$

et

$$M\frac{L^3}{\Delta^4} = m\frac{l^3}{\delta^4};$$

d'où

$$\frac{\Delta}{\delta} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

V. Si les deux équations du second degré représentent deux paraboloïdes elliptiques ou hyperboliques égaux, les conditions d'égalité seront, avec $\Delta = 0$, $\delta = 0$,

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous pouvons déduire de là une équation du second degré donnant les deux paramètres d'un paraboloïde.

Soit

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} - 2x = 0$$

la seconde équation du paraboloïde considéré, en coordonnées rectangulaires.

Les conditions précédentes deviendront

$$\frac{P}{-\frac{1}{pp'}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}.$$

Ici

$$l = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p'} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{pp'}.$$

Donc

$$\frac{P}{l} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{N}{-(p+p')l}\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}};$$

d'où

$$l = \frac{P^2}{LM} \quad \text{et} \quad p + p' = \frac{NL^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi

$$pp' = -\frac{LM}{P^2} \quad \text{et} \quad p + p' = N\left(\frac{L}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc p et p' seront les racines de l'équation

$$\varpi^2 - N\left(\frac{L}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}}\varpi - \frac{LM}{P^2} = 0.$$

Si les premiers axes coordonnés sont rectangulaires, cette équation sera

$$\varpi^2 - (A + A' + A'')\left[\frac{L}{(B^2 + B'^2 + B''^2 - A'A'' - A''A - AA')^3}\right]^{\frac{1}{2}}\varpi$$
$$- \frac{L}{(B^2 + B'^2 + B''^2 - A'A'' - A''A - AA')^2} = 0.$$

VI. Les deux équations du second degré représenteront deux cônes égaux, si l'on a, avec $L = 0$, $l = 0$, $\Delta \gtrless 0$, $\delta \gtrless 0$,

$$\frac{\Delta}{\delta}\frac{N}{n} = \left(\frac{P}{p}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2\frac{M}{m} = \left(\frac{P}{p}\right)^3.$$

VII. Les deux équations du second degré donneront deux ellipsoïdes ou deux hyperboloïdes semblables, si l'on a

$$\frac{L}{\Delta^2}P = \frac{1}{K}\frac{l}{\delta^2}p,$$
$$\frac{L^2}{\Delta^3}N = \frac{1}{K^2}\frac{l^2}{\delta^3}n,$$
$$\frac{L^3}{\Delta^4}M = \frac{1}{K^3}\frac{l^3}{\delta^4}m,$$

d'où

$$K = \frac{l}{L}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2\frac{p}{P} = \frac{l}{L}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{l}{L}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Les conditions de similitude sont donc

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}},$$

et d'ailleurs il faudra que l'on ait $K > 0$.

VIII. Pour deux paraboloïdes, il résultera de là une seule condition de similitude, à savoir

$$\left(\frac{N}{n}\right)^2 = \frac{M}{m}\cdot\frac{P}{p}.$$

Cette condition peut s'obtenir par l'équation en ϖ. Deux paraboloïdes seront semblables si leurs paramètres sont proportionnels. Cela donne

$$n\left(\frac{l}{p^3}\right)^{\frac{1}{2}} K = N\left(\frac{L}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\frac{lm}{p^2}K^2 = \frac{LM}{P^2},$$

d'où

$$K = \frac{N}{n}\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^3}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2}{P^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\frac{N}{n} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\left(\frac{N}{n}\right)^2 = \frac{M}{m}\cdot\frac{P}{p}.$$

De plus,

$$K = \frac{N}{n}\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^3}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$K = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{p}{P},$$

K étant le rapport de similitude.

L'élimination de $\frac{\Delta}{\delta}$ mènerait au même résultat par les relations du numéro précédent.

IX. *Des cylindres elliptiques ou hyperboliques.*

L'équation générale

$$\begin{gathered}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz\\+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0\end{gathered}$$

représente un cylindre elliptique ou hyperbolique, lorsque l'on a

$$B''^2-AA'\gtrless 0,$$

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}=0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix}=0.$$

Si nous prenons pour origine un centre (α, β, γ), l'équation devient

$$\begin{gathered}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz\\+2B'xz+2B''xy+C\alpha+C'\beta+C''\gamma+D=0.\end{gathered}$$

Les coordonnées α, β, γ satisfont aux équations

$$\begin{aligned}A\alpha+B''\beta+B'\gamma+C&=0,\\B''\alpha+A'\beta+B\gamma+C'&=0,\\B'\alpha+B\beta+A''\gamma+C''&=0,\end{aligned}$$

dont les deux premières donnent

$$\alpha=-\frac{\begin{vmatrix} B'\gamma+C & B'' \\ B\gamma+C' & A' \end{vmatrix}}{AA'-B''^2},$$

$$\beta=-\frac{\begin{vmatrix} A & B'\gamma+C \\ B'' & B\gamma+C \end{vmatrix}}{AA'-B''^2}.$$

Il en résulte

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D$$

$$= \frac{C\begin{vmatrix} B'' & B'\gamma+C \\ A' & B\gamma+C' \end{vmatrix} - C'\begin{vmatrix} A & B'\gamma+C \\ B'' & B\gamma+C' \end{vmatrix} + (C''\gamma + D)\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}}{AA' - B''^2}$$

$$= \frac{\gamma\left\{C\begin{vmatrix} B'' & B' \\ A' & B \end{vmatrix} - C'\begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & B \end{vmatrix} + C''\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}\right\}}{AA' - B''^2}$$

$$+ \frac{C\begin{vmatrix} B'' & C \\ A' & C' \end{vmatrix} - C'\begin{vmatrix} A & C \\ B'' & C' \end{vmatrix} + D\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}}{AA' - B''^2}.$$

Le coefficient de γ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix};$$

il est donc nul.

D'ailleurs, l'autre terme est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix}.$$

Donc

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D = \frac{\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix}}{AA' - B''^2} = \frac{L_1}{\Delta_1},$$

en posant

$$L_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_1 = AA' - B''^2.$$

Ainsi l'équation de la surface rapportée au centre est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + \frac{L_1}{\Delta_1} = 0$$

Soit

$$aX^2 + a'Y^2 + \frac{L_1}{\Delta_1} = 0$$

l'équation aux axes correspondante.

Nos relations fondamentales donneront ici

$$\frac{M}{1} = \frac{N}{a + a'} = \frac{P}{-aa'}.$$

Donc, si u et v désignent les carrés des demi-axes déterminés par les équations

$$au + \frac{L_1}{\Delta_1} = 0, \quad a'v + \frac{L_1}{\Delta_1} = 0,$$

ces relations deviennent

$$\frac{M}{1} = \frac{N}{-\frac{L_1}{\Delta_1}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)} = \frac{P}{-\frac{L_1^2}{\Delta_1^2}\frac{1}{uv}},$$

d'où

$$uv = -\frac{M}{P}\frac{L_1^2}{\Delta_1^2}, \quad u + v = \frac{N}{P}\frac{L_1}{\Delta_1}.$$

Donc u et v seront les racines de l'équation

$$V^2 - \frac{N}{P}\frac{L_1}{\Delta_1}V - \frac{M}{P}\frac{L_1^2}{\Delta_1^2} = 0.$$

Soit considéré un second cylindre ayant pour équation

$$\begin{gathered} ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz \\ + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0 \end{gathered}$$

par rapport à des axes faisant entre eux les angles φ, ψ, ω.

En supposant

$$b''^2 - aa' \gtrless 0,$$

les deux cylindres sont égaux si l'on a

$$\frac{L_1}{\Delta_1}\frac{N}{P}=\frac{l_1}{\delta_1}\frac{n}{p}$$

et

$$\frac{L_1^2}{\Delta_1^2}\frac{M}{P}=\frac{l_1^2}{\delta_1^2}\frac{m}{p}:$$

conditions que l'on peut mettre sous l'une de ces deux formes

$$\frac{\Delta_1}{\delta_1}=\frac{L_1}{l_1}\frac{N}{n}\cdot\frac{p}{P}=\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{L_1}{l_1}=\frac{\Delta_1}{\delta_1}\frac{P}{p}\cdot\frac{n}{N}=\frac{\Delta_1}{\delta_1}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

X. Les deux cylindres, au lieu d'être égaux, seront semblables si l'on a

$$\frac{n}{p}\frac{l_1}{\delta_1}K=\frac{N}{P}\frac{L_1}{\Delta_1},$$

$$\frac{m}{p}\frac{l_1^2}{\delta_1^2}K^2=\frac{M}{P}\frac{L_1^2}{\Delta_1^2},$$

d'où

$$K=\frac{L_1}{l_1}\frac{N}{n}\frac{p}{P}\frac{\delta_1}{\Delta_1}=\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\delta_1}{\Delta_1},$$

ce qui donne

$$\left(\frac{N}{n}\right)^2=\frac{M}{m}\frac{P}{p}.$$

XI. Les deux cylindres deviennent chacun le système de deux plans, si l'on a

$$L_1=0;\quad l_1=0;$$

alors la condition d'égalité devient

$$\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{n}{N}=\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\frac{P}{p}\cdot\frac{M}{m}=\left(\frac{N}{n}\right)^2,$$

résultat aisé à vérifier.

XII. *Cylindres paraboliques.*

Si l'équation

$$\begin{gathered}Ax^2+A'y^2+A''z^2\\+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0\end{gathered}$$

représente un cylindre parabolique, les termes du second degré y forment un carré parfait.

Alors

$$\begin{aligned}B^2-A'A''&=0, & AB-B'B''&=0,\\B'^2-A''A&=0, & A'B'-B''B&=0,\\B''^2-AA'&=0, & A''B''-BB'&=0;\end{aligned}$$

d'où il suit que $P=0$, $\Delta_1=0$, et L est indépendant de D.

Les relations trouvées pour deux cylindres elliptiques ou hyperboliques sont satisfaites par là même. Elles ne donnent rien à l'égard des cylindres paraboliques, à moins qu'on n'en déduise une nouvelle relation qui ne devienne pas illusoire par les égalités qui viennent d'être écrites. C'est ce que nous allons faire au moyen de l'analyse suivante.

Les conditions générales d'égalité pour deux cylindres sont

$$\frac{\Delta_1}{\delta_1}=\frac{L_1}{l_1}\frac{N}{n}\frac{p}{P}=\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Elles donnent

$$\left(\frac{\Delta_1}{\delta_1}\right)^2=\frac{L_1}{l_1}\frac{N}{n}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)\left(\frac{p}{\delta_1}\right)$$

et

$$\left(\frac{\Delta_1}{\delta_1}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{L_1}{l_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{L_1}{l_1}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ou bien

$$\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{p}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{L_1}{l_1}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ou

$$\left(\frac{N}{n}\right)^{3}\frac{\Delta_1}{P}\frac{p}{\delta_1} = \frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{2};$$

ce qui fait

$$\left(\frac{N}{n}\right)^{3} = \frac{H}{h}\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{2},$$

en posant

$$H = \frac{P}{\Delta_1}, \quad h = \frac{p}{\delta_1}.$$

Expression de H. — La surface étant un cylindre, on a les équations

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} C & B'' & B' \\ C' & A' & B \\ C'' & B & A'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A & C & B' \\ B'' & C' & B \\ B' & C'' & A'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

En faisant

$$AB - B'B'' = \varepsilon, \quad A'B' - B''B = \varepsilon', \quad A''B'' - BB' = \varepsilon'',$$

la première donne tour à tour

$$A\,(A'A''-B^2)-B'\varepsilon'-B''\varepsilon''=0,$$
$$A'(A''A-B'^2)-B''\varepsilon''-B\,\varepsilon=0,$$
$$A''(AA'-B''^2)-B\,\varepsilon-B'\varepsilon'=0.$$

Les autres donnent

$$(i)\qquad\left\{\begin{array}{l} C\,(A'A''-B^2)-C'\varepsilon''-C''\varepsilon'=0,\\ C'(A''A-B'^2)-C''\varepsilon-C\varepsilon''=0,\\ C''(AA'-B''^2)-C\varepsilon'-C'\varepsilon=0.\end{array}\right.$$

Par l'élimination de $AA'-B''^2$, on obtient

$$(A''C'-BC'')\,\varepsilon+(A''C-B'C'')\,\varepsilon'=0;$$

on aura de même

$$(AC''-B'C)\,\varepsilon'+(AC'-B''C)\,\varepsilon''=0,$$
$$(A'C-B''C')\,\varepsilon''+(A'C''-BC')\,\varepsilon=0;$$

de sorte que

$$\varepsilon'=-\frac{A''C'-BC''}{A''C-B'C''}\,\varepsilon,\quad \varepsilon''=-\frac{A'C''-BC'}{A'C-B''C'}\,\varepsilon.$$

Substituons dans H les valeurs que fournissent les équations (i) pour $A'A''-B^2$, $A''A-B'^2$, $AA'-B''^2$, et ces valeurs de ε' et de ε''. Nous aurons

$$H=\frac{\begin{array}{l} C\,(C'^2+C''^2-2C'C''\cos\Phi)\,(A'C-B''C')\,(A''C-B'C'')\\ -C'(C''^2+C^2-2C''C\cos\Psi)\,(A''C'-BC'')\,(A'C-B''C')\\ -C''(C^2+C'^2-2CC'\cos\Omega)\,(A'C''-BC')\,(A''C-B'C'')\end{array}}{CC'C''\,(A'C-B''C')\,(BC-B'C')}.$$

Voilà une expression de H applicable à tout cylindre elliptique ou hyperbolique.

Au cas d'un cylindre parabolique, comme $B=\sqrt{A'A''}$,

$B' = \sqrt{A''A}$, $B'' = \sqrt{AA'}$, nous aurons

$$\begin{aligned}
A'C - B''C' &= \sqrt{A'}\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right),\\
A''C' - BC'' &= \sqrt{A''}\left(C'\sqrt{A''} - C''\sqrt{A'}\right),\\
A''C - B'C'' &= \sqrt{A''}\left(C\sqrt{A''} - C''\sqrt{A}\right),\\
A'C - B''C' &= \sqrt{A'}\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right),\\
A'C'' - BC' &= \sqrt{A'}\left(C''\sqrt{A'} - C'\sqrt{A''}\right),\\
A''C - B'C'' &= \sqrt{A''}\left(C\sqrt{A''} - C''\sqrt{A}\right),
\end{aligned}$$

puis

$$BC - B'C' = \sqrt{A''}\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right).$$

Au moyen de ces expressions, H devient

$$H = \frac{\begin{array}{l} C\left(C'^2 + C''^2 - 2C'C''\cos\Phi\right)\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)\left(C\sqrt{A''} - C''\sqrt{A}\right)\\ + C'\left(C''^2 + C^2 - 2C''C\cos\Psi\right)\left(C'\sqrt{A''} - C''\sqrt{A'}\right)\left(C'\sqrt{A} - C\sqrt{A'}\right)\\ + C''\left(C^2 + C'^2 - 2CC'\cos\Omega\right)\left(C''\sqrt{A} - C\sqrt{A''}\right)\left(C''\sqrt{A'} - C'\sqrt{A''}\right)\end{array}}{CC'C''\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)^2},$$

$$H = \frac{\begin{array}{l} A\left(C'^2 + C''^2\right) - 2C'C''\sqrt{A'A''} + A'\left(C''^2 + C^2\right)\\ - 2C''C\sqrt{A''A} + A''\left(C^2 + C'^2\right) - 2CC'\sqrt{AA'}\\ - 2\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)\left(C\sqrt{A''} - C''\sqrt{A}\right)\cos\Phi\\ - 2\left(C'\sqrt{A''} - C''\sqrt{A'}\right)\left(C'\sqrt{A} - C\sqrt{A'}\right)\cos\Psi\\ - 2\left(C''\sqrt{A} - C\sqrt{A''}\right)\left(C''\sqrt{A'} - C'\sqrt{A''}\right)\cos\Omega\end{array}}{\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)^2}.$$

Pour $A'' = 0$, cette valeur de H se réduit à

$$H = \frac{\begin{array}{l} \left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)^2 + C''^2\left(A + A'\right)\\ + 2C''\sqrt{A}\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)\cos\Phi\\ + 2C''\sqrt{A'}\left(C'\sqrt{A} - C\sqrt{A'}\right)\cos\Psi - 2C''^2\sqrt{AA'}\cos\Omega\end{array}}{\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)^2},$$

$$H = \frac{\begin{array}{l} \left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)^2 + C''^2\left(A + A'\right) + 2C''\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)\\ \times\left(\sqrt{A}\cos\Phi - \sqrt{A'}\cos\Psi\right) + C''^2\left(A + A' - 2\sqrt{AA'}\cos\Omega\right)\end{array}}{\left(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}\right)^2}.$$

Si, en outre, $A' = 0$,

$$H = \frac{C'^2 + C''^2 - 2C'C'' \cos\Phi}{C'^2}.$$

Si on avait $A'' = 0$, $A = 0$, on aurait

$$H = \frac{C^2 + C''^2 - 2CC'' \cos\Psi}{C^2},$$

Autre expression de H *au cas du cylindre parabolique.* — Les équations

$$AB - B'B'' = \varepsilon,$$
$$A'B' - B''B = \varepsilon',$$
$$A''B'' - BB' = \varepsilon''$$

donnent

$$A = \frac{B'B''}{B} + \frac{\varepsilon}{B}, \quad A' = \frac{B''B}{B'} + \frac{\varepsilon'}{B'}, \quad A'' = \frac{BB'}{B'} + \frac{\varepsilon''}{B''},$$

d'où l'on tire

$$A'A'' - B^2 = \frac{B}{B''}\varepsilon' + \frac{B}{B'}\varepsilon'' + \frac{\varepsilon'\varepsilon''}{B'B''},$$
$$A''A - B'^2 = \frac{B'}{B}\varepsilon'' + \frac{B'}{B''}\varepsilon + \frac{\varepsilon''\varepsilon}{B''B},$$
$$AA' - B''^2 = \frac{B''}{B'}\varepsilon + \frac{B''}{B}\varepsilon' + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{BB'}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans la première expression de H, en mettant à la place de ε' et de ε'' leurs valeurs en ε, puis si l'on fait $\varepsilon = 0$, on trouve

$$H = \frac{\begin{array}{c} B\,(B''^2 + B'^2 - 2B'B'' \cos\Phi)(A''C - B'C'')(A'C - B''C') \\ - B'(B''^2 + B^2 - 2BB'' \cos\Psi)(A''C' - BC'')(A'C - B''C') \\ - B''(B^2 + B'^2 - 2BB' \cos\Omega)(A'C'' - BC')(A''C - B'C'') \end{array}}{B''^2 A''(BC - B'C')(A'C - B''C')};$$

d'où, à cause de $A = \frac{B'B''}{B}$, $A' = \frac{B''B}{B'}$, $A'' = \frac{BB'}{B''}$,

$$H = \frac{\begin{array}{l}(B'^2 + B''^2 - 2B'B''\cos\Phi)(BC - B'C')(BC - B''C'') \\ +(B''^2 + B^2 - 2B''B\cos\Psi)(B'C' - B''C'')(B'C' - BC) \\ +(B^2 + B'^2 - 2BB'\cos\Omega)(B''C'' - BC)(B''C'' - B'C')\end{array}}{B''^2(BC - B'C')^2}.$$

Quand on élimine B, B' et B'' de cette formule, on retombe bien sur l'expression de H précédemment établie.

La condition d'égalité pour deux cylindres paraboliques sera la formule

$$\left(\frac{N}{n}\right)^3 = \frac{H}{h}\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^2,$$

en y employant la valeur de H trouvée ci-dessus, et en attribuant à h une valeur analogue.

Soit

$$y^2 - 2qx = 0$$

la seconde des équations données pour les deux cylindres.

Alors

$$n = \sin^2\psi,$$

$$l_1 = \begin{vmatrix} a & b'' & c \\ b'' & a' & c' \\ c & c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -q \\ 0 & 1 & 0 \\ -q & 0 & d \end{vmatrix} = -q^2,$$

$$h = \frac{c^2 + c''^2 - 2cc''\cos\psi}{c^2} = 1.$$

Donc

$$\frac{N^3}{\sin^6\psi}\frac{1}{H} = \frac{L_1}{-q^2}\left(\frac{M}{m}\right)^2,$$

$$q^2 = -\frac{L_1 H}{N^3}\left(\frac{M}{m}\right)^2\sin^6\psi,$$

$$q = \left(-\frac{L_1 H}{N^3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{M}{m}\sin^3\psi.$$

Si l'équation se rapporte à des axes rectangulaires, et qu'elle soit $y^2 - 2Qx = 0$,

$$Q = \left(-\frac{L_1 H}{N^3}\right)^{\frac{1}{2}} M.$$

De là on conclut que

$$q = Q\frac{\sin^3\psi}{m} = Q\frac{\sin^3\psi}{1 - \cos^2\varphi - \cos^2\psi - \cos^2\omega + 2\cos\varphi\cos\psi\cos\omega}.$$

Au cas de $\omega = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$, c'est

$$q = Q\sin\psi.$$