Nouvelles annales de mathématiques

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 547-558

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__547_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 381

(voir tome XVI, page 181);

PAR M. J.-J. HEMMING.

Représentons par Σp la somme de tous les diviseurs de p, l'unité et p compris. Soient $1, d_1, d_2, d_3, \ldots, m$, *tous les diviseurs du nombre m. Faisons*

$$\frac{m}{1} = m, \quad \frac{m}{d_1} = \delta_1, \quad \frac{m}{d_2} = \delta_2, \quad \frac{m}{d_3} = \delta_3, \ldots, \frac{m}{m} = 1;$$

on aura cette identité :

$$\Sigma 1 + d_1 \Sigma d_1 + d_2 \Sigma d_2 + d_3 \Sigma d_3 + \ldots + m \Sigma m$$
$$= \frac{m^2}{1} \Sigma 1 + (\delta_1)^2 \Sigma d_1 + (\delta_2)^2 \Sigma d_2 + (\delta_3)^2 \Sigma d_3 + \ldots + 1 \Sigma m,$$

où $\Sigma 1 = 1$. (J. LIOUVILLE.)

Solution. — Décomposons m en facteurs premiers, et soit

$$m = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots p^\pi \ldots = \mathrm{P}(p^\pi);$$

il est facile de voir que $\Sigma(d\Sigma d)$ et $\Sigma(\delta^2 \Sigma d)$ ne sont que les développements de ces produits :

$$\mathrm{P}\Big[1 + p(1+p) + p^2(1+p+p^2) + \ldots$$
$$+ p^\pi(1+p+p^2+\ldots+p^\pi)\Big],$$
$$\mathrm{P}\Big[(p^\pi)^2 + (p^{\pi-1})^2(1+p) + (p^{\pi-2})^2(1+p+p^2) + \ldots$$
$$+ (1+p+p^2+\ldots+p^\pi)\Big].$$

Mais, puisque

$$1 + p(1+p) + p^2(1+p+p^2) + \ldots$$
$$+ p^\pi(1+p+p^2+\ldots+p^\pi)$$
$$= (p^\pi)^2 + (p^{\pi-1})^2(1+p) + \ldots$$
$$+ p^2(1+p+p^2+\ldots+p^{\pi-1}) + (1+p+p^2+\ldots+p^\pi),$$

les produits sont égaux; d'où

$$\Sigma(d\Sigma d) = \Sigma(\delta^2 \Sigma d).$$

Remarque. — On peut aussi facilement démontrer cette formule

$$\Sigma(d\Sigma d) = \Sigma(\delta^2\Sigma d) = \frac{\Sigma m . \Sigma(mq)}{\Sigma q}.$$

où q désigne le produit de tous les facteurs premiers du nombre m.

Exemple :

$$m = 6, \quad 91 = \frac{12 \cdot 91}{12}.$$

Question 591

(voir tome XX, page 141),

PAR M. A. S.,
Elève de l'École Polytechnique.

Deux tétraèdres ayant pour volumes V *et* V', *étant polaires réciproques par rapport à une surface du second ordre dont les demi-axes principaux sont* a, b, c; *si l'on désigne par* V_1, V_2, V_3, V_4 *les volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le centre de la surface aux sommets de* V, *on a la relation*

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2 = V' \frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^3}.$$

(FAURE.)

Je suppose que la surface soit un ellipsoïde, je la rapporte à ses axes, et son équation est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Soient $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$, $x_4 y_4 z_4$ les coordonnées des sommets de V; les faces de V' sont les plans polaires de ces sommets relativement à la surface, et ont pour équations :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0, \quad \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} + \frac{zz_2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{xx_3}{a^2} + \frac{yy_3}{b^2} + \frac{zz_3}{c^2} - 1 = 0, \quad \frac{xx_4}{a^2} + \frac{yy_4}{b^2} + \frac{zz_4}{c^2} - 1 = 0.$$

Le volume du tétraèdre V′ a donc pour expression connue :

$$6V' = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2} & 1 \\ \frac{x_2}{a^2} & \frac{y_2}{b^2} & \frac{z_2}{c^2} & 1 \\ \frac{x_3}{a^2} & \frac{y_3}{b^2} & \frac{z_3}{c^2} & 1 \\ \frac{x_4}{a^2} & \frac{y_4}{b^2} & \frac{z_4}{c^2} & 1 \end{vmatrix}^3}{\begin{vmatrix} \frac{x_2}{a^2} & \frac{y_2}{b^2} & \frac{z_2}{c^2} \\ \frac{x_3}{a^2} & \frac{y_3}{b^2} & \frac{z_3}{c^2} \\ \frac{x_4}{a^2} & \frac{y_4}{b^2} & \frac{z_4}{c^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{x_3}{a^2} & \frac{y_3}{b^2} & \frac{z_3}{c^2} \\ \frac{x_4}{a^2} & \frac{y_4}{b^2} & \frac{z_4}{c^2} \\ \frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{x_4}{a^2} & \frac{y_4}{b^2} & \frac{z_4}{c^2} \\ \frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2} \\ \frac{x_2}{a^2} & \frac{y_2}{b^2} & \frac{z_2}{c^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2} \\ \frac{x_2}{a^2} & \frac{y_2}{b^2} & \frac{z_2}{c^2} \\ \frac{x_3}{a^2} & \frac{y_3}{b^2} & \frac{z_3}{c^2} \end{vmatrix}},$$

ce que l'on peut écrire :

$$6V' = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^3 \left(\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\right)^3}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \left(\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\right)^4} = a^2 b^2 c^2 \frac{(6V)^3}{V_1 V_2 V_3 V_4 b^4},$$

d'après les expressions connues du volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées des sommets ; de là, enfin, je tire

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2 = V' \frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^3}.$$

C'est la relation cherchée.

Question 600

(voir tome XX, page 399),

PAR MM. WIDMANN ET GILLIOT,
Élèves du lycée de Strasbourg (classe de M. Pruvost).

Soient ABCD, MNPQ *deux quadrilatères, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique, et tels, que les sommets du premier soient les points de contact du second : le lieu des centres des coniques circonscrites à* ABCD *est tangent au lieu des centres des coniques inscrites au quadrilatère* MNPQ. (GROS.)

Je prends pour triangle de référence le triangle TT′T″ formé par les diagonales du quadrilatère complet MNPQIK : l'équation d'une conique inscrite dans ce quadrilatère peut être mise sous la forme

$$(1) \qquad \alpha^2 = \frac{\gamma^2}{\mu+1} - \frac{\beta^2}{\mu},$$

μ étant un paramètre variable. Les équations des côtés du quadrilatère sont :

Pour	PQ. .	$\alpha+\beta+\gamma=0,$
	MQ. . .	$\gamma+\alpha-\beta=0,$
	PN. . .	$\beta+\gamma-\alpha=0,$
	MN. . .	$\alpha+\beta-\gamma=0.$

L'ensemble des droites PA et PB est représenté par l'équation

$$(2) \qquad \beta^2+\gamma^2-\alpha^2+2\beta\gamma=0.$$

En cherchant les points communs à ces deux coniques, on aura la corde de contact; or l'élimination de α^2 entre les équations (1) et (2) conduit à l'équation

$$[(\mu+1)\beta-\mu\gamma]^2=0,$$

de sorte que l'équation de la corde de contact AB sera :

$$\text{Pour AB...}\quad \beta - \frac{\mu}{\mu+1}\gamma = 0.$$

On trouve de même, pour les équations des trois autres côtés du quadrilatère inscrit :

$$\text{Pour CD...}\quad \beta + \frac{\mu}{\mu+1}\gamma = 0,$$

$$\text{AD...}\quad \alpha - \frac{1}{\mu+1}\gamma = 0,$$

$$\text{BC...}\quad \alpha + \frac{1}{\mu+1}\gamma = 0.$$

Considérons une conique particulière inscrite dans le quadrilatère MNPQ; μ sera déterminé ainsi que les points A, B, C, D, et l'équation générale des coniques passant par ces quatre points sera

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \beta^2 - \left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^2\gamma^2 + \lambda\left[\alpha^2 - \left(\frac{1}{\mu+1}\right)^2\gamma^2\right] = 0.$$

Cherchons le lieu des centres de ces coniques. On sait que si a, b, c sont les côtés du triangle de référence, α, β, γ les coordonnées du centre de la conique, ces coordonnées vérifient les relations

$$\frac{f'_\alpha}{a} = \frac{f'_\beta}{b} = \frac{f'_\gamma}{c}.$$

Écrivons donc ces équations :

$$\frac{\lambda\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = -\frac{1}{(\mu+1)^2}\frac{(\mu^2+\lambda)\gamma}{c}.$$

En éliminant λ, j'ai l'équation du lieu .

$$(3)\qquad \frac{a}{\alpha} + \mu^2\frac{b}{\beta} + (\mu+1)^2\frac{c}{\gamma} = 0.$$

Ainsi, le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère ABCD, déterminé par les points de contact d'une conique inscrite dans le quadrilatère fixe, est une conique circonscrite au triangle de référence.

Cette conclusion nous conduit au théorème suivant :

Le lieu des centres des coniques coupant un quadrilatère en quatre points donnés, qui sont les points de contact d'une conique inscrite à ce quadrilatère, est une conique circonscrite au triangle formé par les trois diagonales de ce quadrilatère.

Supposons maintenant que la conique inscrite à MNPQ varie, μ variera, et à chaque valeur de μ correspondra un quadrilatère tel que ABCD, qui donnera un lieu analogue à celui que représente l'équation (3). Nous aurons donc ainsi une infinité de coniques circonscrites au triangle de référence. L'équation de ces courbes ne renfermant que le paramètre μ, qui y entre au second degré, nous aurons l'équation de l'enveloppe de ces coniques en exprimant que le premier membre de l'équation (3) est un carré parfait. L'équation développée est :

$$\mu^2\left(\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)+2\mu\frac{c}{\gamma}+\frac{a}{\alpha}+\frac{c}{\gamma}=0.$$

En écrivant que les racines sont égales, nous avons la relation

$$\frac{c^2}{\gamma^2}=\left(\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{c}{\gamma}\right),$$

et l'équation de l'enveloppe est

$$(4)\qquad \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0.$$

Ainsi, tous les lieux des centres des coniques circonscrites à des quadrilatères tels que ABCD sont tangents à une droite. Or cette droite n'est autre chose que le lieu des centres des coniques inscrites dans le quadrilatère MNPQ. Éliminons en effet μ entre les équations du centre de la conique (1) :

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{\frac{\beta}{b}}{\mu} = \frac{\frac{\gamma}{c}}{-\mu - 1} = -\frac{\left(\frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}\right)}{1},$$

nous retrouvons l'équation (4), qui représente la droite passant par les milieux des trois diagonales du quadrilatère.

Comme corollaire du théorème énoncé plus haut, nous pourrons dire :

Corollaire. — Cette conique est tangente à la droite qui passe par les milieux des trois diagonales du quadrilatère.

Question 682

(voir 2ᵉ série, t. II, p. 550),

PAR M. HEMMING.

Soient les trois variables x, y, z, exprimées par les nouvelles variables u, v, w de la manière suivante :

$$x = \frac{(1 + h^2 v^2 + c^2 w^2)\, u}{u + v^2 + w^2}, \quad y = \frac{[1 - h^2 u^2 + (c^2 - h^2)\, w^2]\, v}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$z = \frac{[1 - c^2 u^2 - (c^2 - h^2)\, v^2]\, w}{u^2 + v^2 + w^2};$$

h et c sont des quantités constantes : il faut démontrer que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = P^2 du^2 + Q^2 dv^2 + R^2 dw^2,$$

où $Pu = x$, $Qv = y$, $Rw = z$. (STREBOR.)

Solution. — On aura d'abord

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = P^2 du^2 + (2P du + u dP) u dP$$
$$+ Q^2 dv^2 + (2Q dv + v dQ) v dQ$$
$$+ R^2 dw^2 + (2R dw + w dR) w dR;$$

d'autre part, nous déduirons des relations entre x, y, z et u, v, w, sans difficulté,

$$P - Q = h^2, \quad Q - R = c^2 - h^2,$$
$$P u^2 + Q v^2 + R w^2 = 1,$$

d'où résulte

$$dP = dQ = dR,$$
$$(2P du + u dP) u + (2Q dv + v dQ) v + (2R dw + w dR) w = 0.$$

En ayant égard à ces dernières relations, on constate immédiatement l'égalité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = P^2 du^2 + Q^2 dv^2 + R^2 dw^2.$$

Note. — M. Bignon, de Rio-Janeiro, a traité la même question.

Question 699;

PAR M. G.,
Répétiteur au lycée Louis-le Grand.

En partageant, dans un rapport constant, les normales d'une cycloïde quelconque (ordinaire, allongée ou raccourcie), on obtient une courbe dont les arcs sont exprimables en arcs d'ellipse. (MANNHEIM.)

Une cycloïde *quelconque* a pour équations :

$$(1) \quad \begin{cases} y - a = b \cos u, \\ x - au = b \sin u. \end{cases}$$

Entre les coordonnées d'un point (y, x) de cette courbe et celles (ξ, η) de la ligne en question, il existe la relation

$$(2) \qquad \frac{\eta}{y} = \frac{\xi - au}{x - au} = n.$$

Différentions les équations (1) et (2), il nous vient :

$$dy = -b \sin u\, du, \qquad d\eta = n\, dy,$$
$$dx = (a + b\cos u)\, du, \quad d\xi = n\, dx + a\, du - na\, du,$$

et, par conséquent,

$$d\eta = -nb \sin u\, du,$$
$$d\xi = (a + bn \cos u)\, du.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} ds &= du\sqrt{n^2 b^2 \sin^2 u + (a + bn\cos u)^2} \\ &= du\sqrt{a^2 + n^2 b^2 + 2abn\cos u} \\ &= du\sqrt{(a + nb)^2 - 4abn\sin^2\frac{u}{2}}. \end{aligned}$$

Enfin, en posant $\frac{u}{2} = \varphi$, nous obtenons

$$(3) \qquad ds = 2(a + nb)\, d\varphi \sqrt{1 - \frac{4abn}{(a + nb)^2}\sin^2\varphi}.$$

Pour l'arc d'ellipse, l'élément différentiel est

$$ds = a\, d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi},$$

a étant le grand axe et e l'excentricité. Il faut donc que les coefficients de l'expression (3), en appelant A, B, E les axes et l'excentricité d'une ellipse, satisfassent aux relations

$$A = 2(a + nb), \quad E^2 = \frac{4abn}{(a + nb)^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}.$$

C'est ce qui a lieu. En effet,

$$E^2 = \frac{16abn}{4(a+nb)^2} = \frac{[2(a+nb)]^2 - [2(a-nb)]^2}{[2(a+nb)]^2}.$$

Note. — L'auteur de la question en a donné lui-même une solution géométrique dans son Mémoire sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes (*Journal de l'École Polytechnique*, XL^e cahier, p. 205).

Question 716

(voir 2^e serie, t. III, p. 445),

PAR M. FONTANEAU,
Ancien officier de Marine.

Quatre cercles OA'C'B', OAB'C, OBCA', OAC'B *passent par un même point* O. *Prouver que les points de concours des cordes* OA', BC; OB', AC; OC', AB *sont en ligne droite; ou encore* OA, B'C; OB, A'C; OC', A'B', *etc.*

Cette proposition peut être considérée comme un cas particulier d'une autre, dont l'énoncé ne diffère du précédent qu'en ce que les cercles y doivent être remplacés par des coniques assujetties à passer par trois points communs o, o', o''.

Pour démontrer cette proposition générale, il suffit de faire voir que les droites OA', OB', OC' forment, avec les droites OA, OB, OC, trois couples de droites en involution (*Géométrie supérieure*, § 359). Cela résulte du théorème suivant :

Soient données : 1° *trois coniques assujetties à avoir trois points communs* o, o', o'' *et qui, par leurs quatrièmes points d'intersection, donnent un triangle curviligne* ABC; 2° *une quatrième conique, menée aussi par les points* o, o', o'', *et qui coupe les côtés* AB, AC, BC *du* *triangle curviligne aux points* C′, B′, A′. *Si l'on se donne en outre un point arbitraire* M *par lequel on fait passer les six coniques*

$$(oo'o''\mathrm{MA}),\quad (oo'o''\mathrm{MB}),\quad (oo'o''\mathrm{MC}),$$
$$(oo'o''\mathrm{MA'}),\quad (oo'o''\mathrm{MB'}),\quad (oo'o''\mathrm{MC'}),$$

les angles de ces six coniques en l'un quelconque des points o, o', o'', M, *vérifient les relations d'involution.*

Ce théorème, qui résulte, pour moi, d'une méthode spéciale de transformation appliquée à la proposition, § 359, de la *Géométrie supérieure*, peut aussi se démontrer par le principe de correspondance anharmonique.

Corollaire. — *Dans le théorème précédent, les six coniques en involution peuvent être remplacées par les six systèmes de droites*

$$(o'o'', \mathrm{OA}),\quad (o'o'', \mathrm{OB}),\quad (o'o'', \mathrm{OC}),$$
$$(o'o'', \mathrm{OA'}),\quad (o'o'', \mathrm{OB'}),\quad (o'o'', \mathrm{OC'}).$$

Les droites OA, OB, OC, OA′, OB′, OC′ *forment donc un faisceau en involution. De ce corollaire résulte donc la solution demandée.*