NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CARRIÈRE

Extension au cas de l'espace des considérations développées par M. Mannheim pages 133 à 135 des Nouvelles annales (mars 1865)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 543-546

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__543_0>

EXTENSION AU CAS DE L'ESPACE
des considérations développées par M. Mannheim pages 133 à 135 des *Nouvelles Annales* (mars 1865);

PAR M. CARRIÈRE,
Elève du lycée Louis-le-Grand.

Soient

$$(1) \qquad S = 0,$$
$$(2) \qquad \Sigma = 0$$

les équations de deux surfaces du second degré; le lieu des centres des surfaces du second degré passant par leur intersection s'obtient en éliminant λ entre les dérivées prises par rapport à x, y et z de l'équation

$$(3) \qquad S + \lambda \Sigma = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{S'_x}{\Sigma'_x} = \frac{S'_y}{\Sigma'_y} = \frac{S'_z}{\Sigma'_z};$$

les points du lieu sont donc les points communs aux surfaces

$$(4) \qquad S'_x \Sigma'_y - S'_y \Sigma'_x = 0,$$
$$(5) \qquad S'_x \Sigma'_z - S'_z \Sigma'_x = 0,$$
$$(6) \qquad S'_y \Sigma'_z - S'_z \Sigma'_y = 0.$$

Or, l'intersection de deux quelconques de ces surfaces se compose d'une droite non située sur la troisième, et d'une courbe gauche du troisième ordre commune aux trois : cette courbe du troisième ordre est donc elle seule le lieu des centres.

Cette courbe *passe par les sommets des quatre cônes du second degré* que l'on peut mener par l'intersection des deux surfaces $S = 0$, $\Sigma = 0$.

Cela posé, remarquons que les termes constants des équations (1) et (2) ne sont pas intervenus dans les dérivées de l'équation (3). Le lieu ne sera donc pas changé si nous prenons pour équations des deux premières surfaces

$$S + k = 0, \quad \Sigma + l = 0,$$

dans lesquelles k et l sont des constantes arbitraires. Interprétons géométriquement ce résultat analytique.

L'équation

$$S + k = 0,$$

si l'on fait varier k, représente des surfaces concentriques et homothétiques à la surface dont l'équation est (1). Appelons A le faisceau que forment ces surfaces, B le faisceau analogue formé par les surfaces dont l'équation est $\Sigma + l = 0$; on conclut de ce qui précède que :

Quelles que soient deux surfaces prises dans les faisceaux A *et* B, *les surfaces du second degré passant par leurs points communs auront leurs centres sur une courbe unique du troisième degré* C.

Si les deux premières surfaces des faisceaux A et B sont tangentes entre elles, leur point de contact appartiendra à la courbe C.

En effet, prenons pour origine le point de contact et pour plan des XY le plan tangent commun : les deux surfaces auront pour équations

$$Z = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$
$$Z = A_1x^2 + A'_1y^2 + \ldots .$$

Si l'on retranche ces deux équations membre à membre, on a, en posant $A - A_1 = a$, $A' - A'_1 = a'$, ...,

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0,$$

surface passant par les points communs aux deux précédentes : c'est un cône du deuxième degré dont le sommet est au point O. Or ce sommet est le centre d'une des surfaces

$$S + \lambda\Sigma = 0.$$

Donc, si deux des surfaces des faisceaux A et B sont tangentes entre elles, leur point de contact appartient à C. De sorte que :

Les points où les surfaces du faisceau A *sont touchées par les surfaces du faisceau* B *sont sur la courbe du troisième degré* C.

On peut en déduire le nombre des surfaces du faisceau B qui touchent une surface du second degré F.

Pour cela il faut chercher le nombre des points d'intersection de la courbe C avec la surface F. Or, la courbe C, jointe à la droite dont les équations sont, par exemple,

$$S'_x = 0, \quad \Sigma'_x = 0,$$

forme une courbe du quatrième degré, intersection des surfaces définies par les équations (4) et (5). Cette courbe du quatrième degré coupera la surface F en huit points. Enlevant les deux points d'intersection donnés par la droite, on en conclut que la courbe gauche du troisième degré C coupera la surface F en six points. Donc :

Il y a en général six surfaces B *qui touchent une surface du second degré donnée.*

Si les surfaces du faisceau B sont des sphères concentriques, les points où elles touchent les surfaces du faisceau A ne sont autres que les pieds des normales abaissées sur ces surfaces du centre fixe de toutes les sphères du faisceau B. Donc :

Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point fixe sur une série de surfaces du second degré concentriques et homothétiques est une courbe du troisième degré.

Nous avons vu que cette courbe gauche coupait une surface du second degré en général en six points. Donc :

On peut mener six normales à une surface du second degré par un point donné dans l'espace.

Enfin on peut ajouter que :

Le lieu des sommets des cônes du second degré passant par l'intersection de deux surfaces du second degré, l'une du faisceau A, *l'autre du faisceau* B, *est la courbe* C.