E. BARBIER

Construire une sphère tangente à quatre sphères données

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 537-542

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__537_1>

CONSTRUIRE UNE SPHÈRE TANGENTE A QUATRE SPHÈRES DONNÉES;

PAR M. E. BARBIER.

1. Si un tétraèdre T est homothétique aux quatre tétraèdres T_1, T_2, T_3 et T_4 ayant chacun avec T un sommet commun :

1° La sphère O, circonscrite au tétraèdre T, est tangente aux quatre sphères O_1, O_2, O_3 et O_4 circonscrites aux quatre autres tétraèdres;

2° Les points de contact sont les sommets du tétraèdre T;

3° Les faces du tétraèdre T passent par les droites P_1, P_2, P_3 et P_4, qui sont situées dans un même plan M, et qui sont les axes de similitude des tétraèdres T_1, T_2, T_3 et T_4 et des sphères O_1, O_2, O_3 et O_4 pris trois à trois;

4° Les faces du tétraèdre T_1 passent par les quatre droites Q_1, P_2, P_3 et P_4 situées dans le plan M; la droite Q_1 est l'intersection du plan M par un plan qui contient le centre de O_4, et qui est parallèle au plan des centres de O_2, de O_3 et de O_4.

2. Il résulte de ces propositions et de leurs réciproques que le problème de construire une sphère tangente à quatre sphères données revient à inscrire dans une sphère un tétraèdre dont les faces passent par quatre droites faciles à déterminer et situées dans un même plan.

3. Proposons-nous, par exemple, d'inscrire dans une sphère O_1 un tétraèdre dont les faces passent par les droites Q_1, P_2, P_3 et P_4, situées dans un même plan M.

Menons par la droite Q_1 un plan V qui coupe la sphère O_1 suivant un cercle C_1; dans ce cercle, inscrivons un triangle U, dont les côtés passent par les points où P_2, P_3 et P_4 rencontrent Q_1; cela fait, par les côtés du triangle U, menons trois plans passant respectivement par les droites P_2, P_3 et P_4; ces trois plans forment un trièdre qui, généralement, n'a point son sommet sur la sphère; il détermine donc sur la sphère un triangle d'entrée U et un triangle de sortie U'; le plan V' du triangle U' coupe le plan M suivant une droite R_1. Par la droite R_1, il suffit de mener un plan tangent à la sphère O_1 pour avoir au point de contact l'un des sommets du tétraèdre demandé.

4. La construction précédente est fondée sur cette propriété du pentaèdre UU' de pouvoir se déformer de manière qu'il soit toujours inscrit dans la sphère O_1, et que ses cinq faces passent toujours respectivement par les cinq droites Q_1, P_2, P_3, P_4 et R_1.

Pour déterminer la droite R_1 sans avoir à construire préalablement le triangle U, il suffit de prendre pour plan V un plan tangent à la sphère, et de considérer le triangle U comme réduit au point de contact.

5. La propriété des faces d'un pentaèdre inscrit, de pouvoir tourner autour de cinq droites situées dans un même plan, est analogue à la propriété des côtés du quadrilatère inscrit, d'être pivotants autour de quatre points situés sur une même ligne droite.

On démontre facilement cette propriété par le moyen de ce théorème : *Si les côtés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle* C *coupent la corde commune du cercle* C *et d'un autre cercle* C' *en quatre points, il y a une infinité de quadrilatères inscrits dans* C' *et dont les côtés passent par les mêmes points de la corde commune.*

6. On peut éviter la construction de la droite Q_1, si l'on remplace les sommets du triangle U par leurs homologues dans les sphères O_2, O_3 et O_4 qui déterminent un triangle t inscrit entre les trois cercles fournis par l'intersection des sphères O_2, O_3 et O_4 et d'un plan ν, parallèle à V, et mené par l'axe de similitude des trois sphères.

On sait construire le triangle t, comme on l'a vu dans la construction du cercle tangent à trois cercles donnés, mais on peut éviter cette construction auxiliaire en prenant pour plan ν un plan tangent commun aux trois sphères O_2, O_3 et O_4; le triangle t est alors le triangle déterminé par les trois points de contact.

7. Pour compléter les analogies des problèmes du contact des cercles et du contact des sphères, il me reste à donner une construction qui fasse trouver à la fois les quatre points de contact de la sphère tangente à quatre sphères données.

Cette construction est analogue à la construction de l'hexagramme inscrit par laquelle on trouve à la fois les trois points de contact d'un cercle tangent à trois cercles donnés.

Mener onze droites consécutives de la manière suivante : la première passe par le centre de similitude de O_1 et de O_2 et aboutit à des points de O_1 et de O_2 qui ne sont pas homologues ; la deuxième, partant d'un point ainsi trouvé sur O_2, passe par le centre de similitude de O_2 et de O_3, et elle aboutit à un point de O_3 qui n'est point homologue du point trouvé sur O_2 ; la construction se continue d'une manière semblable entre O_3 et O_4 ; puis entre O_4 et O_1 ; de nouveau entre O_1 et O_2, et ainsi de suite.

Il est bien entendu que les centres de similitude choisis pour la construction sont coordonnés de manière qu'ils soient dans le même plan M.

La construction prolongée indéfiniment ne se ferme point en général ; les points obtenus sur O_1 sont dans un plan o_1 qui coupe le plan M suivant la droite R_1 ; il suffit de mener par R_1 un plan tangent à la sphère O_1 pour avoir un des points de contact demandés.

On a les autres points de contact en déterminant de même les droites R_2, R_3 et R_4 par les plans o_2, o_3 et o_4.

8. *Tous les points donnés par la construction des onze droites, continuée indéfiniment, sont sur une même sphère Ω.*

Toutes les sphères Ω, et par suite les deux sphères tangentes auxquelles donne lieu la considération du plan de similitude M, *ont une section commune* (*réelle ou imaginaire*) *dans ce plan* M.

9. Nous indiquerons les démonstrations des théorèmes énoncés dans les n^{os} 7 et 8.

1° La ligne formée par les droites consécutives menées comme on l'a vu (7) est inscriptible dans une sphère.

Il suffit de démontrer ce théorème pour quatre droites consécutives quelconques données par la construction.

Supposons, par exemple, que ces droites soient menées entre O_1 et O_2, entre O_2 et O_3, entre O_3 et O_4 et entre O_4 et O_1.

Menons, par le point situé sur O_3, une ligne auxiliaire passant par le centre de similitude de O_3 et de O_1, et terminée à un point de O_1 non homologue du point de O_3.

Il faut remarquer que la ligne auxiliaire forme, avec les deux premières droites, trois côtés d'un hexagramme inscriptible dans un cercle (construction du cercle tangent à trois cercles donnés); de même cette ligne auxiliaire et les deux autres droites sont trois côtés d'un hexagramme inscriptible dans un cercle.

Ces deux cercles ont la ligne auxiliaire pour corde commune, ils sont donc sur une même sphère.

2° Les sphères analogues à Ω ont une section réelle ou imaginaire commune dans le plan de similitude M. En effet, il est facile de voir qu'un point appartenant à l'une des droites R_1, R_2, R_3 et R_4 a la même puissance par rapport à toutes les sections faites dans les sphères Ω; ces quatre droites donnent donc des cordes communes à toutes les sphères Ω.

10. On peut donner une autre construction de la sphère tangente à quatre sphères.

A partir d'un point quelconque de O_1, entre les sphères O_1 et O_2, menons une première droite passant par un centre de similitude A de O_1 et O_2, et non terminée par des points homologues; à partir du point ainsi trouvé sur O_2, entre les sphères O_2 et O_3, menons une deuxième droite, passant par un centre de similitude B de O_2 et de O_3, et non terminée par des points homologues; enfin, par le point trouvé sur O_3, entre les sphères O_3 et O_4, menons une troisième droite, passant par un centre de similitude C de O_3 et de O_4, et non terminée par des points homologues.

La sphère Ω, circonscrite aux trois droites obtenues, peut être une sphère tangente aux quatre sphères données; mais, généralement, la sphère Ω coupera les sphères O_1, O_2, O_3 et O_4. Il faudra, pour avoir un des points de contact, celui qui est sur O_1, par exemple, mener le plan du cercle d'intersection de Ω et de O_1, et par l'intersection de ce plan avec le plan ABC mener un plan tangent à O_1.

Les sphères Ω, et en particulier les deux sphères tangentes qui font partie de cette suite de sphères, ont le plan ABC pour plan radical commun.

Le lieu de leurs centres est la ligne qui projette le centre radical des quatre sphères sur le plan ABC.

11. La construction du cercle tangent à trois cercles présente la propriété de l'hexagramme inscrit sous cette forme : *Trois cordes d'un cercle sont deux à deux comprises entre trois angles dont les sommets sont en ligne droite.*

La construction de la sphère tangente donne une proposition analogue : *Quatre sections planes d'une sphère sont deux à deux sur six cônes dont les sommets sont ceux d'un quadrilatère plan.*