NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-J.-A. MATHIEU

Étude de géométrie comparée, avec applications aux sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 529-537

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__529_0>

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE, AVEC APPLICATIONS AUX SECTIONS CONIQUES

(voir p. 481);

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie, Sous-Directeur de la fonderie de Toulouse.

§ IV. — *Droite conjuguée et point conjugué d'une conique inscrite.*

1. *Une conique inscrite au triangle de référence a pour ligne réciproquement conjuguée par polarité inverse une conique circonscrite.*

Lorsqu'une droite reste tangente à une conique inscrite au triangle de référence, son pôle décrit une droite qui est nommée droite conjuguée de la conique.

La droite de pôles inverses de la tangente passe par un point fixe qui est le pôle inverse de la droite conjuguée et qui est nommé point conjugué de la conique.

La droite conjuguée est la droite qui passe par les points d'intersection de chaque côté du triangle avec la corde de contact des deux autres côtés.

Le point conjugué est l'inverse du point de concours des droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé.

La théorie des lignes réciproquement conjuguées par polarité inverse, combinée avec les propriétés de la conique circonscrite qui ont été établies dans le paragraphe précédent, fournit très-facilement et sans aucun calcul la démonstration de ces divers théorèmes.

On peut aussi démontrer synthétiquement toutes ces propriétés par le calcul en faisant voir : 1° que les deux coniques

$$\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{u} + \frac{\gamma}{v} = 0,$$

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 + \gamma^2 v^2 - 2\alpha\beta tu - 2\alpha\gamma tv - 2\beta\gamma uv = 0$$

sont réciproques par polarité inverse, c'est-à-dire que les points de l'une sont les pôles inverses des tangentes de l'autre; 2° que la droite

$$\alpha t + \beta u + \gamma v = 0$$

est à la fois le lieu de l'inverse du point de la circonscrite et du pôle de la tangente de l'inscrite; 3° que l'enveloppe de la polaire du point de la circonscrite et l'enveloppe de la droite de pôles inverses de la tangente de l'inscrite se réduisent à un même point, pôle inverse de la droite

$$\alpha t + \beta u + \gamma v = 0;$$

4° que cette droite passe par les points d'intersection de chaque côté du triangle avec la corde de contact des deux autres côtés, et qu'elle a pour pôle le point de concours des droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé.

Je crois inutile de m'arrêter aux détails de ces deux genres de démonstration.

2. Lorsque la conique est l'ellipse inscrite au triangle de référence par les milieux des côtés, son équation devient

$$a^2 t^2 + b^2 u^2 + c^2 v^2 - 2abtu - 2actv - 2bcuv = 0,$$

et sa conjuguée par polarité inverse est le cercle circonscrit

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{u} + \frac{c}{v} = 0,$$

comme il était facile de le prévoir. La droite conjuguée est à l'infini, le point conjugué est l'inverse du centre de gravité du triangle.

Lorsqu'une ligne a des points à l'infini, ces points sont évidemment les pôles inverses de droites qui passent par l'inverse du centre de gravité du triangle, et qui sont tangentes à la ligne réciproque par polarité inverse de la ligne donnée. Les points de contact de ces tangentes sont à leur tour les pôles inverses des asymptotes de la ligne donnée.

La construction des asymptotes à une conique inscrite peut donc se ramener à la construction des tangentes à une conique circonscrite menées par l'inverse du centre de gravité du triangle, ou plutôt à la recherche des points de contact de ces tangentes.

3. Cinq tangentes d'une conique étant données, on peut prendre trois de ces tangentes pour côtés du triangle de référence, construire soit la droite conjuguée, soit le point conjugué de la conique, et se servir de l'un ou de l'autre pour décrire la courbe par l'enveloppe des tangentes.

Mais si l'on veut reconnaître rapidement la nature de la conique et en construire les éléments, le plus simple sera d'opérer un changement de triangle de référence qui ramène au cas de la conique circonscrite. Les propriétés de la droite conjuguée ou du point conjugué permettent en effet de trouver de suite le triangle des points de contact, et de construire relativement à ce nouveau triangle de référence, qui est un triangle inscrit, la droite conjuguée ou le point conjugué de la conique.

Sur ce second triangle de référence la nature de la conique est reconnaissable aux caractères simples que j'ai signalés; on peut néanmoins remarquer ceux-ci, applicables au premier triangle et déduits de la considération des points ou tangentes à l'infini :

Une conique inscrite à un triangle est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que l'inverse du centre de gravité du triangle est situé à l'intérieur de la conique circonscrite, qui est la réciproque par polarité inverse de la conique donnée, sur cette conique réciproque elle-même ou à l'extérieur.

Dans la parabole inscrite, la droite conjuguée passe par le centre de gravité du triangle; le point conjugué est sur la polaire de l'inverse du centre de gravité.

§ V. — *Questions diverses.*

Les propriétés des droites conjuguées et des points conjugués des coniques sont applicables à beaucoup de problèmes concernant la construction de ces courbes, ainsi qu'à un grand nombre d'autres questions; j'en donnerai une idée dans ce qui va suivre.

1. *Construction de coniques passant par des points et touchant des droites.*

Je citerai d'abord quelques théorèmes sur les enveloppes des droites conjuguées et sur les lieux des points conjugués de coniques assujetties à quatre conditions, théorèmes dont je passerai d'ailleurs les faciles démonstrations.

La droite conjuguée d'une conique circonscrite au triangle de référence, et passant par un point donné, passe par l'inverse de ce point; le point conjugué de la conique est sur la polaire du point donné.

La droite conjuguée d'une conique circonscrite, et tangente à une droite donnée, enveloppe une conique circonscrite qui a pour droite conjuguée la droite don-

née; le point conjugué de la conique est sur une conique inscrite qui a pour droite conjuguée la droite donnée.

La droite conjuguée d'une conique inscrite, et tangente à une droite donnée, passe par le pôle de la droite donnée; le point conjugué est sur la droite de pôles inverses de la droite donnée.

La droite conjuguée d'une conique inscrite, et passant par un point donné, enveloppe une conique circonscrite qui a pour point conjugué le point donné; le point conjugué est sur une conique inscrite qui a pour point conjugué le point donné.

Voici maintenant quelques exemples de construction de coniques assujetties à passer par des points et à toucher des droites.

Qu'il s'agisse de construire la conique dont on connaît quatre tangentes avec le point de contact de l'une d'elles. Je prends pour triangle de référence le triangle formé par trois de ces tangentes, en y introduisant celle dont le point de contact est connu; le point conjugué de la conique cherchée est à l'intersection de la droite de pôles inverses de la quatrième tangente avec l'inverse de la droite qui joint le point de contact au sommet opposé.

Qu'il s'agisse de construire la conique passant par quatre points et tangente à une droite quelconque. Je prends trois des quatre points pour sommets du triangle de référence; le point conjugué de la conique cherchée est à l'intersection de la polaire du quatrième point avec la conique inscrite qui a pour droite conjuguée la droite donnée. Donc il y a deux solutions.

Qu'il s'agisse encore de construire une conique passant par trois points et tangente à deux droites. Je prends les trois points pour sommets du triangle de référence; la droite conjuguée de la conique cherchée est tangente commune à deux coniques circonscrites qui ont pour droites conjuguées les droites données; le point conjugué de la conique cherchée est à l'intersection de deux coniques inscrites qui ont pour droites conjuguées les droites données. Il y a donc quatre solutions.

2. *Faire passer par quatre points une conique semblable à une conique donnée.*

Ce problème, qui comprend comme cas particuliers ceux de la parabole et de l'hyperbole équilatère passant par quatre points, se résout très-simplement par ce théorème que met en évidence la formule citée (2ᵉ partie, § II) :

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{\Delta}{R} + 1}{\frac{\Delta}{R} - 1}.$$

La droite conjuguée d'une conique passant par trois points et semblable à une conique donnée enveloppe un cercle concentrique au cercle circonscrit, et dont le rayon a pour valeur

$$R = \frac{\frac{M}{N} + 1}{\frac{M}{N} - 1}.$$

Il est évident en effet que la droite conjuguée de la conique cherchée, par rapport à l'un quelconque des triangles déterminés par les quatre points, est la tangente menée par l'inverse du quatrième point à un cercle de rayon connu. Donc il y a deux solutions.

Dans le cas de la parabole déterminée par quatre points, le cercle se confond avec le cercle circonscrit, et il existe deux paraboles passant par quatre points, pourvu que l'inverse du quatrième point soit situé en dehors du cercle circonscrit, ce qui arrive toujours lorsque les quatre points donnés forment un quadrilatère convexe. Les formules du § II donnent les paramètres de ces deux paraboles :

$$p^2 = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R}\left(\frac{\Delta}{R}+1\right)^{-3} = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{8R},$$

$$p'^2 = \frac{\delta'_1\delta'_2\delta'_3}{R}\left(\frac{\Delta'}{R}+1\right)^{-3} = \frac{\delta'_1\delta'_2\delta'_3}{8R}.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère déterminée par quatre points, la droite conjuguée est tout simplement la droite qui joint l'inverse du quatrième point au centre du cercle circonscrit.

Il n'y a donc qu'une hyperbole équilatère passant par quatre points, dont la longueur de l'axe se calcule par la formule

$$a^2 = \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R}.$$

Le centre de l'hyperbole équilatère passant par quatre points peut être obtenu directement par ce théorème :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par trois points est le cercle qui passe par les milieux des côtés du triangle (cercle des neuf points).

3. *Propriétés des foyers des coniques tangentes à trois droites.*

Les deux foyers d'une conique tangente à trois droites étant deux points inverses, lorsqu'une conique est inscrite à un triangle, et que l'un des foyers décrit une ligne donnée, l'autre foyer décrit la ligne inverse. De là des théorèmes tels que ceux-ci :

Lorsqu'une conique est inscrite à un triangle et que l'un des foyers décrit une conique circonscrite, l'autre foyer décrit une droite.

Le lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites est le cercle circonscrit au triangle.

4. *Parabole et hyperbole équilatère déterminées par quatre tangentes.*

La construction de la parabole tangente à quatre droites ne peut offrir aucune difficulté. On a le moyen de trouver le foyer par l'intersection de deux cercles. La droite conjuguée de la courbe relativement au triangle formé par trois tangentes est la droite qui joint le pôle de la quatrième tangente au centre de gravité du triangle.

Quant à l'hyperbole équilatère tangente à quatre droites, dont l'existence réelle dépend de la nature du triangle, le plus simple est de la construire en déterminant d'abord son centre; car, une fois le centre obtenu, on trouve facilement cinq tangentes. Or le centre d'une hyperbole équilatère tangente à quatre droites se détermine par le théorème suivant :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères, tangentes à trois droites, est le cercle (*aujourd'hui nommé* cercle conjugué), *réel ou imaginaire suivant que le triangle est obtusangle ou acutangle, qui a pour centre le point de concours des trois hauteurs du triangle, et qui passe par les points d'intersection* (réels ou imaginaires) *du cercle circonscrit avec le cercle des neuf points.*

5. *Remarque sur le lieu des centres des coniques qui passent par quatre points.*

On sait que le lieu des centres des coniques qui passent par quatre points est une conique passant par neuf points : les milieux des six droites que les quatre points déterminent, et les points d'insersection des deux droites de chaque système de droites passant par les quatre points. Il résulte de là que si l'on prend trois des neuf points pour sommets du triangle de référence, les inverses des six autres seront en ligne droite.

On peut ainsi construire directement le centre de la conique qui passe par cinq points, par l'intersection de deux droites. En effet, je prends pour sommets du triangle de référence les milieux des côtés de l'un des triangles que les cinq points déterminent, et, considérant successivement les deux séries de coniques passant par les trois points dont je suis parti, et par l'un des deux autres, j'obtiens, pour les lieux des inverses des centres, deux droites dont l'intersection me donne l'inverse du centre de la conique qui passe par les cinq points.