Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 522-526

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__522_0>

CORRESPONDANCE.

1. M. Griffiths nous a adressé à diverses reprises un certain nombre de théorèmes que nous allons réunir ici.

I. *Dans un triangle quelconque,* G *étant le centre de gravité de l'aire,* P *le point de rencontre des hauteurs, les cercles suivants ont le même axe radical :* 1° *le cercle des neuf points ;* 2° *le cercle décrit sur* PG *comme diamètre ;* 3° *le cercle circonscrit au triangle ;* 4° *le cercle conjugué ;* 5° *le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes de l'ellipse qui touche le triangle en ses milieux.*

II. *Soient* E_a, E_b, E_c *les centres des cercles exinscrits à un triangle* ABC : *le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle des neuf points du triangle* $E_aE_bE_c$.

III. *Soient* P, Q, R *les points de rencontre des bissectrices internes* AP, BQ, CR *avec les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC ; L, M, N *les milieux de ces côtés ;* p, q, r *les milieux des segments compris entre les sommets* A, B, C *et le point de concours des bissectrices (centre du cercle inscrit) ;* X, Y, Z *les points d'intersection des bissectrices externes* AX, BY, CZ *avec les droites* MN, NL, LM ; *et* l, m, n *les points de rencontre des droites* Xp, Yq, Zr *avec les médianes* AL, BM, CN. *Démontrer que les douze points* P, Q, R ; L, M, N ; p, q, r ; l, m, n *sont situés sur la même conique.*

IV. *On prend deux triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *circonscrits à un triangle donné* ABC, *de telle sorte que les droites* Aα, Bβ, Cγ ; Aα', Bβ', Cγ' *concourent en* P, P' : *on désigne par* A', B', C' *les points d'intersection* ($\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$),

$(\gamma\gamma', \alpha\alpha')$, $(\alpha\alpha', \beta\beta')$; *on a les propriétés suivantes :*

1° *Les droites* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *passent par un même point* Q, *et pareillement* $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ *passent par un même point* Q'.

2° *Les côtés des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *et les deux axes d'homologie des triangles* $(A'B'C', \alpha\beta\gamma)$, $(A'B'C', \alpha'\beta'\gamma')$ *sont tangents à une même conique conjuguée au triangle* A'B'C'.

3° *Réciproquement, les sommets* α, β, γ; α', β', γ' *et les centres d'homologie* P, P' *sont sur une même conique conjuguée au triangle* ABC.

V. M. Griffiths a bien voulu aussi nous envoyer l'expression du rayon de courbure en coordonnées trilinéaires. Cette formule, à laquelle notre savant collaborateur parvient par un élégant calcul, est trop compliquée pour trouver place ici, et les applications qu'en fait l'auteur ne semblent donner aucun avantage, sur ce point, aux coordonnées trilinéaires sur les coordonnées cartésiennes.

2. M. Camillo Tychsen, de Copenhague, nous communique une méthode d'intégration des équations du second ordre et du second degré de la forme

$$(1)\qquad P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + A\frac{dy}{dx} + S = 0.$$

En posant pour intégrale première

$$(2)\qquad CL + M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

où L, M, N sont des fonctions de x et de y, et C une constante, et en éliminant la constante C entre l'équation (2) et celle qui résulte de sa différentiation, on arrive à une équation de même forme que (1). L'identification de l'équation résultante avec l'équation (1) détermine L, M, N. On est ainsi ramené à l'intégration d'une équation du premier ordre.

3. *Extrait d'une lettre de M. X..., abonné en Belgique.*

« Je me permets de vous demander votre avis sur la valeur d'une solution donnée à une question proposée récemment dans un concours de Mathématiques.

» La question proposée était la suivante :

» *Trouver le lieu des foyers des courbes du second ordre qui ont même directrice, même tangente et même point de contact.*

» Or, c'est une propriété connue des courbes du second degré, que si l'on prolonge la tangente jusqu'à la directrice, la droite qui va du point d'intersection au foyer est perpendiculaire à celle qui va du foyer au point de contact. D'où l'on conclut que le lieu cherché est un cercle dont le diamètre est la portion de la tangente comprise entre le point de contact et celui où elle rencontre la directrice; et pour trouver l'équation du lieu, il suffit d'écrire que les coefficients angulaires des deux droites, qui vont, l'une du foyer au point de contact, et l'autre qui joint le foyer au point où la tangente rencontre la directrice, sont réciproques et de signes contraires : ce qui a été fait en prenant pour axes la directrice et la perpendiculaire passant par le point de rencontre de la tangente avec la directrice.

» Cette solution me paraît très-simple et irréprochable, et cependant elle a été comptée comme nulle. On a prétendu que la propriété invoquée n'est pas démontrée dans les éléments, et que, d'ailleurs, la question proposée n'était qu'une manière détournée de faire démontrer la propriété sur laquelle on s'appuyait.

» Aucune de ces deux assertions ne me paraît fondée. L'étude complète de la Géométrie analytique plane comporte évidemment celle des propriétés communes aux courbes du second degré, et lorsqu'une propriété commune est connue et démontrée, elle passe à l'état de théorème, et l'on peut s'en étayer pour résoudre les questions qui peuvent en dépendre : ceci est élémentaire en Mathématiques. Je comprendrais la seconde assertion si la propriété contestée était la seule qui pût donner la solution du problème ; mais il n'en est pas ainsi : on pouvait déduire le lieu soit de l'équation focale, soit en s'appuyant sur le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice, et il est évident que si l'élève a préféré partir de la propriété contestée, c'est qu'elle donne immédiatement le lieu.

» La question à résoudre est donc celle de savoir si, comme je le crois, on a pu légitimement s'appuyer sur la propriété des courbes du second degré rappelée ci-dessus pour déterminer le lieu proposé, et c'est là-dessus que je voudrais vous voir donner votre avis dans le prochain numéro de votre journal.

» Il importe que des jeunes gens ne puissent plus être frappés, soit pour avoir trop bien su, soit pour avoir su plus que leurs concurrents, et, sous ce rapport, ce que vous en direz dans les *Annales* pourra servir de règle si des cas analogues viennent à se représenter. »

Note du rédacteur — On nous fait beaucoup d'honneur en supposant que notre opinion exprimée puisse plus tard servir de règle dans un concours. Nous allons cependant donner notre humble avis sur le cas qui nous est soumis par M. X..., en tâchant d'ajouter aux excellentes raisons qu'il a déjà présentées.

Le théorème cité est bien connu des élèves de Mathématiques spéciales en France. On l'enseigne dans les cours et il est donné dans plusieurs ouvrages élémentaires. On doit présumer que l'élève qui l'a cité en connaissait la démonstration ; mais si l'on avait quelque doute sur ce point, il était bien facile de les lever en interrogeant l'élève. Cela aurait mieux valu que de recourir à la mesure rigoureuse de l'exclusion. Les fins de non-recevoir sont toujours regrettables, parce qu'elles sont de pure forme et ne vont pas au fond des choses.

La seconde prétention me paraît encore plus insoutenable. Pour qu'il y eût ce cercle vicieux que le jury du concours prétend avoir reconnu, il faudrait admettre : 1° que l'élève a d'abord trouvé le lieu par une méthode quelconque ; 2° qu'il en a conclu comme corollaire le théorème en question ; 3° que, renversant tout l'ordre suivi jusque-là, il a pris ce théorème comme base de sa démonstration. Quelle effrayante imagination ! Je dis effrayante, parce qu'avec un pareil système deux lignes de l'écriture d'un honnête homme suffiraient pour le faire pendre. D'ailleurs, il faudrait prouver que cet ordre d'idées si subtilement imaginé est celui du candidat. On a donc pris une simple conjecture pour un fait avéré. Nous pensons qu'en France une pareille discussion, soumise à l'autorité compétente, aurait été cassée et l'épreuve recommencée.

Nous n'admettons pas non plus qu'une question posée dans un concours puisse être une *manière détournée* d'amener *une autre* question. Tout doit être clair dans un énoncé. Voulez-vous que la question soit traitée par le calcul, dites-le ; qu'on en déduise telle et telle conséquence, dites-le encore, et n'obligez pas le candidat à deviner une intention que vous n'avez nullement exprimée.

P.