E. DE JONQUIÈRES

Exercices sur la théorie des sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 504-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__504_1>

EXERCICES SUR LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

PROBLÈME. — *Construire la conique osculatrice du quatrième ordre en un point donné d'une courbe du troisième degré dont on connaît neuf points* (en n'employant que la règle et le compas).

En chaque point d'une courbe quelconque il existe une conique qui a avec elle, en ce point, un contact du quatrième ordre. C'est, à proprement parler, la conique osculatrice, puisque son contact avec la courbe est le plus intime possible. C'est cette conique Σ que nous allons construire au point donné a d'une courbe du troisième degré dont on connaît neuf points.

Pour cela nous allons déterminer : 1° la tangente at de la conique au point a ; 2° deux droites ae, ae' qui soient, par rapport à Σ, les polaires respectives de deux points i, i' pris sur la droite at ; 3° un point α de la conique Σ. Ces éléments équivalent à cinq points donnés, et par conséquent déterminent une conique unique facile à construire.

Mais, avant d'entrer dans le détail de ces diverses constructions, commençons, pour plus d'ordre et de clarté, par rappeler ou établir quelques lemmes indispensables.

Lemmes préliminaires.

Lemme I. — Quand on connaît neuf points d'une courbe du troisième ordre, on sait construire, par les seuls procédés de la Géométrie élémentaire : 1° la tangente à la courbe en l'un de ces points ; 2° le troisième point de rencontre de la courbe avec cette tangente ; 3° les deux autres points d'intersection de la courbe avec une droite menée par l'un de ses points connus. (*Voir* le Mémoire de M. Chasles sur la construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points, *Comptes rendus*, 1853. On peut aussi consulter mes *Mélanges de Géométrie pure.*)

Lemme II. — Quand des coniques passent par quatre mêmes points d'une courbe du troisième ordre, les cordes qu'elles y interceptent passent toutes par un même point de cette courbe (Chasles, Mémoire précité).

Lemme III. — Quand des coniques ont entre elles un contact du troisième ordre en un point a, si d'un point quelconque de leur tangente commune at on leur mène des tangentes, tous les points de contact sont situés sur une même droite aboutissant au point a (Poncelet, *Traité des Propriétés projectives;* Chasles, *Traité des Coniques*, n° 371).

Lemme IV. — Quand des coniques formant un faisceau se touchent toutes en un point a, les cordes qu'elles interceptent dans une conique fixe qui leur est tangente en a passent par un même point.

Ce lemme et le précédent peuvent être regardés comme des cas particuliers du lemme II.

Lemme V. — Quand on connaît neuf points d'une courbe du troisième ordre, il est facile, en n'employant d'ailleurs que la règle et le compas, de construire le cercle osculateur à la courbe en l'un de ces points. (*Voir*, par exemple, le *Traité des Coniques*, n° 53.)

Lemme VI. — Problème. *Par deux points donnés faire passer une conique qui ait un cercle donné pour cercle osculateur en un point désigné* a.

Toutes les coniques qui passent par les deux points et touchent le cercle en a forment un faisceau. Les cordes qu'elles interceptent dans le cercle passent par un point fixe p (lemme IV). On déterminera ce point à l'aide de deux quelconques des coniques du faisceau, ce qui n'exige nullement qu'elles soient tracées. Le point d, où la droite pa coupe le cercle osculateur, appartient à la conique demandée, dont on connaît ainsi cinq points.

Solution du problème proposé.

Les coniques qui ont, au point a, un contact du troisième ordre avec la courbe du troisième ordre, et par conséquent aussi entre elles, forment un faisceau (F) dont fait partie la conique cherchée Σ; et si l'on regarde la tangente at comme étant double, c'est-à-dire comme formée de deux droites coïncidentes (dont chacune passerait par deux des quatre points infiniment voisins que toutes les coniques du faisceau (F) ont en commun), on peut dire que cette droite double est l'une des coniques du faisceau. Donc, si cette tangente rencontre la courbe du troisième ordre au point t, la tangente tP, en ce point t, va rencontrer la courbe au point P, qui est précisément le point de concours de toutes les cordes qu'elle intercepte dans les coniques du faisceau (F) (lemme II).

Menons, par ce point P, une droite quelconque Pc, et soient b, c les points où elle coupe la courbe du troisième ordre. Ces deux points appartiennent à une même conique C du faisceau (F) (lemme II), qu'on déterminera (lemme VI) en la regardant comme étant simplement assujettie à passer par les points b et c, et à avoir, au point a, le même cercle osculateur que la courbe donnée, cercle qu'on aura préalablement construit (lemme V). Par la manière même dont le point P a été obtenu, ces conditions, équivalentes à cinq, entraînent évidemment ici la sixième condition à laquelle la conique C doit satisfaire, savoir : de posséder avec la courbe, au point a, un contact du troisième ordre et non pas seulement du deuxième.

Soient actuellement i, i' deux points pris arbitrairement sur la tangente at; e, e' les points de contact des tangentes menées de ces deux points à la conique C. Les droites ae, ae' sont respectivement les polaires des points i, i' relativement à toutes les coniques du faisceau (F) (lemme III), donc aussi relativement à la conique osculatrice cherchée Σ.

Enfin, si l'on mène la droite Pa qui rencontre la courbe du troisième ordre au point α, on possède toutes les données nécessaires à la construction de Σ. En effet, cette conique doit toucher en a la tangente at, passer par le point α, et diviser harmoniquement les segments ie, $i'e'$ interceptés par les cordes ae, ae' sur les droites $i\alpha$, $i'\alpha$ respectivement, et l'on sait qu'il n'y en a qu'une seule qui puisse satisfaire à ces conditions.

Le problème est donc résolu.

Théorèmes à démontrer.

I. Parmi les coniques qui ont, avec une courbe du troisième ordre, un contact du second ordre en un point donné de cette courbe, il y en a, en général, trois qui ont encore avec la courbe un contact du second ordre en un autre point. Les points de contact de ces coniques sont trois points situés sur une même conique, ayant avec la courbe un contact du second ordre au point donné.

Si la courbe a un point de rebroussement, il n'y a plus qu'une seule de ces coniques.

II. En chaque point d'une courbe du troisième ordre il y a, en général, trois coniques qui ont avec elle un contact du troisième ordre en ce point, et qui le touchent encore en un autre point.

Ce nombre se réduit à un, si la courbe a un point double; il devient nul, si elle a un point de rebroussement.