PAINVIN

Théorèmes sur les diamètres dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 498-500

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__498_1>

THÉORÈMES SUR LES DIAMÈTRES DANS LES CONIQUES;

PAR M. PAINVIN.

Si

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 = 1,$$

$$A' x'^2 + 2 B' x' y' + C' y'^2 = 1$$

sont les équations d'une conique à centre successivement rapportée aux systèmes d'axes xoy, $x'oy'$ dont les angles sont respectivement θ et θ', on a les relations

$$\text{(I)} \qquad \frac{B^2 - AC}{\sin^2\theta} = \frac{B'^2 - A'C'}{\sin^2\theta'},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{A' + C' - 2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}.$$

Ces relations expriment, la première que le produit des axes est constant, et la seconde (après avoir divisé ses deux membres par les racines carrées de ceux de la première) que l'angle des directions asymptotiques est invariable. Mais elles peuvent, en outre, se prêter à de nombreuses interprétations géométriques concernant un système de deux diamètres quelconques; je citerai les deux suivantes.

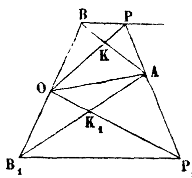
« Théorème I. — Soient deux diamètres réels quel-
» conques OA et OB; menons les tangentes aux extré-
» mités B et B_1 du diamètre OB, lesquelles rencontrent
» en P et P_1 la tangente en A; soient K et K_1 les inter-

» sections des diamètres OP et OP_1 avec les cordes AB
» et AB_1 : on a

$$\text{(1)}\qquad \text{surf AOB}.\sqrt{\frac{OP.OP_1}{OK.OK_1}} = \text{constante} = ab,$$

» a et b étant les longueurs des demi-axes de la courbe.
» Si l'un des diamètres est imaginaire, OB par exem-

Fig. 1.



» ple, on mènera en B la tangente à l'hyperbole conju-
» guée, et on aura

$$\text{(1 bis)}\qquad \text{surf AOB}.\sqrt[2]{\frac{OP}{OK}} = \text{constante} = ab,$$

» a et b étant les demi-axes de la courbe. »

« Théorème II. — Soient deux diamètres quelconques
» OA et OB, l'un d'eux au moins étant réel, OA par
» exemple. Menons la tangente en A et joignons le point O
» au milieu I de la corde AB ; soient Q le point de ren-
» contre de OI avec la tangente en A, et AA', BB' les
» distances respectives des extrémités A et B aux dia-
» mètres OB et OA ; on a

$$\text{(2)}\qquad \frac{1}{\overline{AA'}^2} \pm \frac{1}{\overline{BB'}^2} - \frac{OI - IQ}{OQ}\cdot\frac{\cot\theta}{\text{surf AOB}} = \text{const} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2};$$

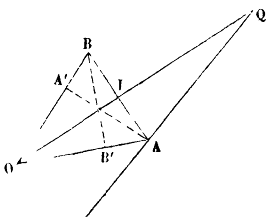
» θ est l'angle des deux diamètres considérés, a et b sont
» les axes de la courbe. Le signe — devant les seconds
» termes de chaque membre correspond au cas où le dia-

32.

» mètre OB est imaginaire. La distance OQ étant con-
» sidérée comme positive, on devra regarder les seg-
» ments OI, IQ, (OI — IQ) comme positifs ou négatifs,
» suivant qu'ils seront dans le sens OQ ou en sens con-
» traire.

» Lorsque les deux diamètres OA et OB sont réels, la

Fig. 2.



» droite QB est tangente à la courbe au point B. Si les
» deux diamètres OA et OB sont imaginaires, on mène
» les tangentes à l'hyperbole conjuguée. »

Les deux théorèmes, traduits par les égalités (1), (1 *bis*) et (2), sont des interprétations géométriques des relations (I) et (II); ils donnent, comme cas particuliers, les propositions connues sur les diamètres conjugués et sur les diamètres rectangulaires.