NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POUDRA

Propriétés du tétraèdre polaire

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 496-498
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__496_0>

PROPRIÉTÉS DU TÉTRAÈDRE POLAIRE;

PAR M. POUDRA.

Les propriétés des tétraèdres polaires sont intimement liées avec celles de l'involution; il est nécessaire de rappeler ici les principales de ces propriétés.

Soit P*mnp* un tétraèdre polaire de la sphère dont le centre est le point O et R le rayon; P, dans ce tétraèdre, est le sommet fixe des tétraèdres polaires, *mnp* en est la base qui peut varier dans son plan. Voici les propriétés de ce tétraèdre :

1° Toute droite menée par un des quatre sommets du tétraèdre est divisée harmoniquement par la sphère et le plan polaire de ce sommet.

2° Chaque plan formant les faces du tétraèdre coupe la sphère suivant une circonférence qui est la base d'un cône tangent à la sphère suivant cette circonférence, et qui a pour sommet le pôle de ce plan.

On voit que le plan *mnp* de la base, étant ici extérieur à la sphère, doit être regardé comme coupant la sphère suivant un cercle imaginaire, qui serait la base d'un cône imaginaire dont P serait le sommet.

3° Les deux plans tangents à la sphère, menés par une des arêtes du tétraèdre, ont pour corde de contact la partie de l'arête opposée comprise dans la sphère.

4° Ces deux plans tangents et les deux faces du tétraèdre qui passe par cette même arête forment un rapport harmonique.

5° Si par cette même arête, telle que *mn*, on mène deux plans formant avec les deux faces du tétraèdre un rapport harmonique, ces deux plans couperont la sphère suivant deux circonférences qui seront sur le même cône, ayant pour sommet le point p opposé à mn.

6° Dans une de ces circonférences, on peut inscrire une infinité de quadrilatères ayant les points m et n pour points de concours des côtés opposés. Les sommets de ces quadrilatères étant joints avec le point p formeront une série de pyramides quadrangulaires inscrites dans le cône, donnant dans l'autre circonférence une autre série de quadrilatères inscrits ayant de même les points m, n pour points de concours des côtés opposés, de sorte que les points m et n seront aussi les sommets de pyramides quadrangulaires : il en résulte évidemment qu'il y aura ainsi une série d'hexaèdres inscrits dans la sphère, formés par trois pyramides hexaèdres; de plus il est évident que les diagonales de tous ces hexaèdres passeront par le quatrième sommet P du tétraèdre.

Ces hexaèdres inscrits seront pour la sphère ce que sont les quadrilatères inscrits dans la circonférence.

7° Si on regarde un des sommets, tel que m, du tétraèdre polaire comme le sommet d'un cône quelconque du second degré, il coupera la sphère suivant une courbe du quatrième : or, si on la regarde comme la base de trois autres cônes ayant pour sommet respectif chacun des trois autres sommets du tétraèdre, ces quatre cônes seront tous du second degré; car on voit que deux de ces cônes, coupés par un plan passant par les deux sommets, donneront dans chaque deux droites formant un quadrilatère inscrit dans la sphère.

On sait que par l'intersection de deux surfaces du second degré on peut faire passer une infinité de surfaces du second degré : comme l'une de ces surfaces peut se transformer en une sphère, on peut en conclure que par l'intersection commune passent toujours quatre cônes ayant pour sommets ceux d'un tétraèdre polaire relativement à cette sphère.