NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POUDRA

De l'involution plane relativement à la sphère

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 493-495

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__493_1>

DE L'INVOLUTION PLANE RELATIVEMENT A LA SPHÈRE;

PAR M. POUDRA.

Soit O le centre d'une sphère et R son rayon; soit I un plan quelconque et D la distance du centre O de la sphère à ce plan I.

Dans ce plan I prenons un point quelconque m et regardons-le comme le sommet d'un cône tangent à la sphère; le plan de contact est ce qu'on appelle le plan polaire du point m relativement à la sphère. Ce plan polaire coupera le plan I suivant une droite indéfinie np. Si on prend de même le plan polaire d'un point quelconque n de cette droite, ce plan polaire coupera le plan I suivant une droite mp passant par le premier point m, et la droite np en un point p, qui sera tel, que si on prend son plan polaire, il passera par les points m et n. Ces trois plans polaires se couperont en un point P, dont le plan polaire sera le plan I; il résulte de ces constructions un tétraèdre $Pmnp$ qui est tel, que le plan polaire de l'un quelconque des sommets est le plan qui passe par les trois autres, et réciproquement le pôle d'une des faces est le sommet opposé; ce tétraèdre est par suite appelé tétraèdre polaire de la sphère.

On voit pareillement que par rapport à cette sphère et ce plan I il existe une infinité de tétraèdres polaires qui ont tous un sommet commun en P et une base telle que mnp, située dans ce plan I.

Dans le tétraèdre polaire $Pmnp$ considérons chaque sommet m, n, p de la base comme le centre d'une sphère orthogonale à la sphère donnée; c'est-à-dire ayant pour rayon la tangente menée de ce point à la sphère; elle passera par conséquent par l'intersection de la sphère donnée avec le plan polaire de ce point.

Les trois sphères ainsi déterminées, étant orthogonales à la sphère donnée, le sont aussi entre elles; elles se coupent suivant une droite QQ_1 passant par le centre O de la sphère primitive, par le pôle P du plan I, et perpendiculaire à ce plan; elles la rencontrent en un point C milieu du segment QQ_1.

Ces trois sphères étant orthogonales entre elles, il en résulte que les droites Qm, Qn, Qp ou Q_1m, Q_1n, Q_1p qui joignent le point Q ou le point Q_1 aux points m, n, p de la base, forment entre elles un angle solide trirectangle. Or, pour tous les tétraèdres polaires ci-dessus, le point Q ou le point Q_1 sera de même le sommet d'un angle solide trirectangle; donc la série des groupes de trois points sur le plan I, base d'un tétraèdre polaire, forme une involution plane, dont C est le point central, la distance $CQ = CQ_1$ la puissance polaire, et Q le sommet.

Connaissant un de ces groupes *mnp* de trois points, on pourra donc déterminer une infinité d'autres groupes, sans avoir recours à la sphère; et chacun de ces groupes formera la base d'un tétraèdre polaire ayant un sommet en P.

On a évidemment

$$\overline{CQ}^2 = D^2 - R^2 = (D + R)(D - R), \quad CP = \frac{D^2 - R^2}{D};$$

$$OP = \frac{R^2}{D}, \quad D = \frac{\overline{CQ}^2}{CP}.$$

Ainsi on voit qu'étant donnée dans un plan une involution plane, on connaîtra la perpendiculaire CQ, et que par suite on pourra prendre D ou R (mais seulement l'un ou l'autre), de sorte qu'il y aura une infinité de sphères correspondantes à une même involution, mais le sommet P des tétraèdres polaires, ou pôle du plan I, variera de position sur l'axe QC. Si on donne CP, on déterminera CQ, puis D et R, etc., c'est-à-dire qu'à un tétraèdre polaire ne correspondra qu'une sphère déterminée de grandeur et de position, et tous les tétraèdres qui auront chacun pour base un des triangles de l'involution déterminée par un angle solide trirectangle de sommet Q seront des tétraèdres polaires de la même sphère.