J.-J.-A. MATHIEU

Étude de géométrie comparée, avec applications aux sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 481-493

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__481_0>

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE, AVEC APPLICATIONS AUX SECTIONS CONIQUES

(voir p. 393);

Par M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie, Sous-Directeur de la fonderie de Toulouse.

DEUXIÈME PARTIE. — APPLICATIONS.

§ I. — *Remarques préliminaires.*

Dans la première partie de ce Mémoire, j'ai rattaché à une vue d'ensemble sur les tendances actuelles de la Géométrie quelques méthodes nouvelles d'investigation dont j'ai posé les bases. Dans cette seconde partie, j'essayerai de donner une idée des ressources qu'on peut tirer de ces méthodes, ou de méthodes de ce genre, évidemment applicables à beaucoup d'autres questions que celles que j'ai traitées dans un travail qui n'est, comme l'indique son titre, qu'une étude, et une étude même très-restreinte, sur un sujet offrant aux spéculations géométriques un champ illimité.

J'exposerai d'abord les principes d'une théorie générale, due à l'inversion trilinéaire, et qui, la figure de référence étant un triangle au lieu d'être une conique, vient remplacer la théorie des lignes polaires réciproques qui disparaît. Cette théorie est celle des lignes réciproques par polarité inverse; elle fait l'objet du deuxième paragraphe.

Le reste du Mémoire est consacré à des applications aux sections coniques. Le choix du triangle de référence ayant, comme je l'ai montré, une influence radicale sur la nature de la conjuguée d'une ligne donnée, ce choix est fait de manière à obtenir les conjuguées les plus simples; et on peut prévoir dès lors que le triangle de référence est pris inscrit ou circonscrit à la conique considérée. Les formules citées à la fin de la première partie de ce Mémoire indiquent les conjuguées qu'on doit obtenir dans les deux cas.

Une conique circonscrite au triangle de référence, étant regardée comme la directrice d'un point, doit avoir, d'après les formules générales, ces trois conjuguées : 1° une droite, lieu de l'inverse du point; 2° un point fixe, par lequel passe la polaire du point; 3° une conique, enveloppe de la droite qui a le point de la conique donnée pour pôle inverse. Quant aux trois conjuguées qu'on ferait naître en regardant la conique comme l'enveloppe de sa tangente, elles seraient une courbe du deuxième degré et deux du quatrième.

Une conique inscrite au triangle de référence, étant regardée comme l'enveloppe de sa tangente, doit avoir, d'après les formules, ces trois conjuguées : 1° une droite lieu du pôle de la tangente; 2° un point fixe, par lequel passe la droite de pôles inverses de la tangente; 3° une conique, lieu du pôle inverse de la tangente. Quant aux trois conjuguées qu'on ferait naître en regardant la conique comme la directrice d'un point, elles seraient une courbe du deuxième degré et deux du quatrième.

En résumé, et pour se borner au plus simple, on remarquera : 1° qu'une conique circonscrite ou inscrite au triangle de référence doit avoir *une droite conjuguée* et *un point conjugué*, cette droite et ce point n'ayant, bien entendu, ni la même signification ni la même construction dans les deux cas; 2° que la connaissance de la droite conjuguée ou du point conjugué doit suffire, avec celle du triangle de référence, pour déterminer et permettre de construire la conique circonscrite ou inscrite.

Ces importantes propriétés des modes de conjugaison mis en jeu dans ce Mémoire seront en effet directement établies par la suite et étudiées avec quelques développements.

§ II. — *Lignes réciproquement conjuguées par polarité inverse.*

1. *Lorsqu'une droite tourne autour d'un point fixe, le pôle inverse de cette droite décrit la droite qui a pour pôle inverse le point fixe; réciproquement, lorsqu'un point décrit une droite fixe, la droite qui a ce point pour pôle inverse passe par le pôle inverse de la droite fixe.*

Soient (t', u', v') le point fixe, $Tt + Uu + Vv = 0$ une droite ayant le point (T, U, V) pour pôle inverse; si cette droite passe par le point (t', u', v'), on aura

$$Tt' + Uu' + Vv' = 0;$$

donc le point (T, U, V) décrit la droite qui a le point (t', u', v') pour pôle inverse. Réciproquement, soit (T, U, V) un point d'une droite ayant le point (t', u', v') pour pôle inverse, on aura

$$Tt' + Uu' + Vv' = 0;$$

mais l'équation d'une droite qui a le point (T, U, V) pour pôle inverse étant

$$Tt + Uu + Vv = 0,$$

on voit que cette droite passe par le point (t', u', v').

2. On peut, au moyen du théorème précédent, établir la théorie des lignes réciproques par polarité inverse, absolument comme on établit celle des lignes polaires réciproques, quand la figure de référence est une conique.

Par conséquent :

Lorsqu'une ligne est la directrice du pôle inverse de la tangente d'une autre ligne, réciproquement la seconde ligne est la directrice du pôle inverse de la tangente de la première.

Le nombre de tangentes que l'on peut mener par un point à l'une des lignes est égal au nombre de points suivant lesquels la droite qui a ce point pour pôle inverse rencontre l'autre ligne.

L'ordre de multiplicité d'un point sur l'une des lignes est égal à l'ordre de multiplicité du contact avec l'autre ligne de la droite qui a ce point pour pôle inverse (l'ordre de multiplicité d'un point étant o lorsque le point n'est pas sur la ligne; l'ordre de multiplicité du contact d'une droite étant o lorsque la droite n'est pas tangente).

Toutes les autres propriétés des lignes polaires réciproques se retrouveraient de même dans les lignes réciproques par polarité trilinéaire inverse; il n'y a de changé que le mode de conjugaison du point et de la droite, qui sert de base à la conjugaison des deux lignes.

Cette théorie rend évidente l'exactitude des formules citées au § VII (1re partie), pour le cas des lignes conjuguées par polarité inverse.

3. Le triangle de référence restant le même, une ligne donnée peut avoir, suivant les modes de conjugaison examinés, six conjuguées : trois en considérant la ligne comme la directrice d'un point, trois en la considérant comme l'enveloppe de sa tangente.

Il résulte de la théorie des lignes réciproques par polarité inverse, que deux de ces six conjuguées d'une ligne donnée se confondent : l'enveloppe de la droite dont le pôle inverse se meut sur la ligne donnée et le lieu du pôle inverse de la tangente de la ligne donnée sont une seule et même ligne, conjuguée réciproque de la première par polarité inverse.

Si maintenant on considère le système formé par une ligne donnée et sa conjuguée réciproque, chacune des deux lignes aura encore quatre conjuguées, mais qui ne feront pas huit lignes différentes, car les deux réciproques auront une même ligne pour conjuguée, suivant deux modes différents. Ainsi, le lieu de l'inverse du point de l'une sera le lieu du pôle de la tangente à l'autre, et réciproquement; l'enveloppe de la polaire du point de l'une sera l'enveloppe de la droite de pôles inverses (*) de la tangente à l'autre, et réciproquement.

On peut encore remarquer que les quatre conjuguées de deux lignes réciproques se partagent en deux systèmes de lignes réciproquement conjuguées aussi par polarité inverse, car le lieu de l'inverse du point d'une ligne et l'enveloppe de la polaire du point de cette même ligne sont évidemment dans ces conditions.

En résumé, une ligne donnée détermine avec ses cinq conjuguées un tableau de six lignes se partageant en trois couples de lignes réciproques, et le tableau resterait le même si, au lieu de partir de cette ligne, on partait de sa conjuguée réciproque par polarité inverse.

4. Pour donner un exemple du tableau dont il vient d'être question, j'anticiperai un peu sur le sujet en considérant le cas particulier d'une conique circonscrite au triangle de référence, qui aura, d'après la théorie établie, une conique inscrite pour ligne réciproque.

Ce système de deux coniques réciproques, l'une cir-

(*) La *droite de pôles inverses* d'une droite est la conjuguée de cette seconde droite par inversion polaire (*voir* p. 400).

conscrite, l'autre inscrite, a les quatre conjuguées suivantes : 1° une droite et un point réciproquement conjugués par polarité inverse, car le point est le pôle inverse de la droite; 2° deux courbes du quatrième degré, l'une doublement inscrite, l'autre doublement circonscrite, toutes deux conjuguées aussi par polarité inverse. La droite conjuguée est à la fois le lieu de l'inverse du point de la conique circonscrite et le lieu du pôle de la tangente de l'inscrite. Le point conjugué, pôle inverse de la droite conjuguée, est à la fois l'enveloppe de la polaire du point de la conique circonscrite et de la droite de pôles inverses de la tangente à l'inscrite.

Comme exemple plus particulier encore, considérons le cas du cercle circonscrit : la réciproque par polarité inverse est l'ellipse inscrite par les milieux des côtés, la droite conjuguée est à l'infini, le point conjugué est l'inverse du centre de gravité du triangle de référence.

§ III. — *Droite conjuguée et point conjugué d'une conique circonscrite.*

1. *Lorsqu'un point décrit une conique circonscrite au triangle de référence, l'inverse de ce point décrit une droite nommée droite conjuguée de la conique.*

La polaire du point de la conique passe par un point fixe qui est le pôle inverse de la droite conjuguée et qui est nommé point conjugué de la conique.

La droite conjuguée est la droite de pôles inverses de celle qui passe par les points d'intersection de chaque côté du triangle et de la tangente à la conique menée par le sommet opposé.

Le point conjugué est le point de concours des droites qui joignent chaque sommet du triangle au point d'inter-

section des tangentes à la conique menées par les deux autres sommets.

La démonstration de ces propriétés est bien simple. D'abord la conique

$$\frac{\alpha}{T}+\frac{\beta}{U}+\frac{\gamma}{V}=0$$

et la droite

$$\alpha t+\beta u+\gamma v=0$$

sont deux lignes inverses, car les équations se changent l'une dans l'autre par la relation des points inverses

$$Tt=Uu=Vv.$$

Soit maintenant (t', u', v') le pôle inverse de la droite

$$\alpha t+\beta u+\gamma v=0,$$

l'équation de cette droite pourra s'écrire

$$tt'+uu'+vv'=0,$$

et celle de la conique

$$\frac{t'}{T}+\frac{u'}{U}+\frac{v'}{V}=0;$$

la polaire d'un point de la conique sera

$$\frac{t}{T}+\frac{u}{U}+\frac{v}{V}=0,$$

donc, en vertu de l'équation précédente, elle passera par le point (t', u', v'). Quant aux propriétés de la droite conjuguée et du point conjugué, relativement aux tangentes, elles deviennent évidentes sur les équations des tangentes aux trois sommets, et sur les équations des droites qui joignent chaque sommet au point d'intersection des tangentes menées par les deux autres.

Tangentes aux trois sommets.	Droites issues des trois sommets.
$\alpha V + \gamma T = 0,$	$\alpha V - \gamma T = 0,$
$\beta V + \gamma U = 0,$	$\beta V - \gamma U = 0,$
$\alpha U + \beta T = 0,$	$\alpha U - \beta T = 0.$

2. Lorsque la conique est le cercle circonscrit, son équation devient

$$\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{u} + \frac{\gamma}{v} = 0,$$

et sa droite conjuguée est à l'infini, car l'équation

$$at + bu + cv = 0$$

est incompatible, pour des valeurs finies des coordonnées, avec l'équation de condition

$$at + bu + cv = 2S \quad (1^{re}\text{ partie, § I}).$$

Le point conjugué du cercle circonscrit est dès lors l'inverse du centre de gravité du triangle.

La droite à l'infini, dont la considération est aujourd'hui systématiquement introduite dans certaines théories de Géométrie supérieure, notamment dans la théorie générale des foyers, est, comme on a pu le voir, tout à la fois : la polaire du centre de gravité, le lieu des pôles inverses des droites qui tournent autour de l'inverse du centre de gravité, l'inverse ou droite conjuguée du cercle circonscrit, et le lieu du pôle de la tangente, ou droite conjuguée, de l'ellipse inscrite par les milieux des côtés.

Les inverses des points à l'infini d'une ligne sont évidemment les points d'intersection de l'inverse de cette ligne avec le cercle circonscrit au triangle de référence. Par conséquent, les inverses des points à l'infini d'une conique se trouvent aux points d'intersection de la droite conjuguée avec le cercle circonscrit. Les polaires des points à l'infini d'une conique sont les tangentes menées par le point conjugué de cette conique à l'ellipse réciproque du cercle circonscrit.

3. Cinq points d'une conique étant donnés, on peut se servir, soit de la droite conjuguée, soit du point conjugué, pour décrire la courbe.

Je prends trois des cinq points pour sommets du triangle de référence, et j'inverse les deux autres; la droite qui joint ces deux inverses est la droite conjuguée qui me permet de trouver autant de points que je veux de la conique.

Autrement : je prends trois des cinq points pour sommets du triangle de référence, et je construis les polaires des deux autres; le point d'intersection de ces polaires est le point conjugué qui me permet de trouver autant de points que je veux de la conique.

Le point conjugué peut être employé pour décrire la conique lorsqu'elle se rapproche beaucoup du cercle, parce qu'alors la droite conjuguée s'éloigne beaucoup.

La considération des points à l'infini de la conique déterminée par cinq points fournit immédiatement sur la nature de la courbe des notions caractéristiques et remarquables.

La conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que la droite conjuguée ne coupe pas la circonférence circonscrite, lui est tangente ou la coupe.

La conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que le point conjugué est intérieur à l'ellipse inscrite par les milieux des côtés du triangle, situé sur cette ellipse ou extérieur.

Dans le cas de l'hyperbole on remarquera :

1° *Que les droites qui joignent un sommet quelconque du triangle aux points d'intersection de la droite conjuguée avec la circonférence circonscrite font entre elles les mêmes angles que les asymptotes ;*

2° *Que les inverses de ces droites sont parallèles aux asymptotes.*

D'où résultent pour l'hyperbole équilatère ces théorèmes :

La droite conjuguée d'une hyperbole équilatère circonscrite passe toujours par le centre du cercle circonscrit.

Toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle se coupent au point de concours des trois hauteurs de ce triangle.

Le point conjugué d'une hyperbole équilatère circonscrite est sur la droite qui a pour pôle inverse le centre du cercle circonscrit, c'est-à-dire sur la polaire du point de concours des hauteurs.

4. On peut de ce qui précède tirer des moyens pour résoudre beaucoup de problèmes sur la conique déterminée par cinq points, sans décrire la courbe, et pour trouver tous les éléments de la courbe.

Les axes d'une conique étant parallèles aux bissectrices de l'un quelconque des systèmes de droites qui passent par quatre points de la conique situés sur un même cercle, on trouvera la direction des axes en cherchant le quatrième point d'intersection du cercle circonscrit avec la conique. Or ce point est l'inverse des points à l'infini de la droite conjuguée ; on l'obtiendra donc en cherchant l'intersection du cercle avec l'inverse de la parallèle à la droite conjuguée, menée par l'un quelconque des sommets du triangle.

On a déjà vu comment on obtenait les directions des asymptotes dans le cas de l'hyperbole.

La seconde extrémité d'une corde qui part d'un sommet du triangle est l'inverse du point d'intersection de l'inverse de cette corde avec la droite conjuguée. On sait dès lors construire le diamètre d'un système quelconque de cordes et le centre de la conique.

La corde sous laquelle la conique coupe une droite quelconque s'obtient de la manière suivante : on cherche le milieu de cette corde au moyen du diamètre conjugué à cette direction ; par un sommet du triangle on mène une corde auxiliaire, tracée sous la condition de faire avec la droite donnée des angles ayant les bissectrices parallèles aux axes de la conique, et on cherche la seconde extrémité de cette corde ; le cercle qui passe par les deux extrémités de la corde auxiliaire, et qui a son centre sur la perpendiculaire élevée par le milieu de la corde cherchée, coupe la droite donnée sous la corde cherchée, qui peut être d'ailleurs réelle ou imaginaire.

Les tangentes à la conique aux trois sommets du triangle peuvent s'obtenir de suite par les propriétés de la droite conjuguée ou du point conjugué ; on a aussi des moyens, soit pour construire la tangente en un point quelconque, soit même pour mener des tangentes par un point extérieur : je ne m'y arrêterai pas. Enfin la construction du cercle osculateur en un point quelconque n'offre pas plus de difficulté. Le cercle osculateur coupe en effet la conique suivant une corde qui fait avec la tangente des angles dont les bissectrices sont parallèles aux axes. La seconde extrémité de cette corde étant obtenue, le cercle osculateur n'est plus qu'un cercle tangent à une droite en un point donné, et passant par un autre point.

5. Je terminerai ce paragraphe en citant quelques-uns

des résultats les plus remarquables auxquels conduit le calcul, lorsqu'on étudie, par l'analyse, la droite conjuguée, relativement à un triangle inscrit, d'une conique rapportée à son centre et à ses axes.

Soient :

$$My^2 + Nx^2 - 1 = 0,$$

l'équation de la conique;

$$\begin{aligned} y\cos\alpha - x\sin\alpha + p &= 0, \\ y\cos\alpha' - x\sin\alpha' + p' &= 0, \\ y\cos\alpha'' - x\sin\alpha'' + p'' &= 0, \end{aligned}$$

les équations des côtés du triangle de référence; (p, q) le centre du cercle circonscrit au triangle; R le rayon du cercle.

L'équation de la ligne conjuguée ou inverse de la conique est celle-ci :

$$(y - q)\cos(\alpha + \alpha' + \alpha'') - (x - p)\sin(\alpha + \alpha' + \alpha'') + R\frac{M + N}{M - N} = 0.$$

Soient maintenant : Δ, la distance du centre du cercle circonscrit à la droite conjuguée; δ_1, δ_2, δ_3 les distances des trois sommets du triangle à la droite conjuguée.

On trouvera les relations suivantes, dont l'importance n'échappera pas :

$$(1) \qquad \frac{M}{N} = \frac{\frac{\Delta}{R} + 1}{\frac{\Delta}{R} - 1},$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R}\left(\frac{\Delta}{R} + 1\right)\left(\frac{\Delta}{R} - 1\right)^2, \\ \frac{1}{N} &= -\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R}\left(\frac{\Delta}{R} + 1\right)^2\left(\frac{\Delta}{R} - 1\right). \end{aligned} \right.$$

Parmi beaucoup d'autres, on peut faire sur ces formules les remarques suivantes :

La formule (1) redonne les caractères déjà connus :

$\Delta > R \ldots$. Ellipse,
$\Delta = \infty \ldots\ldots$ Cercle,
$\Delta = R \ldots$. Parabole,
$\Delta < R \ldots$. Hyperbole.
$\Delta = 0 \ldots\ldots$ Hyperbole équilatère.

Les formules (2) peuvent être très-utilement employées à la détermination des longueurs des axes d'une conique passant par cinq points, ou de la longueur de l'axe d'une hyperbole équilatère passant par quatre points, ou des paramètres d'une parabole passant par quatre points, comme on le verra au § V. La simplicité des constructions préalables est en effet de nature à laisser à un calcul, d'ailleurs très-simple lui-même, tous ses avantages de précision sur les solutions purement géométriques, toujours assez longues, de ces problèmes.

(*La suite prochainement.*)