NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MISTER
NEUBERG

Démonstration analytique du théorème de Mac-Cullagh sur le triangle inscrit dans l'ellipse. Extension au cas de l'hyperbole et de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 458-468

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__458_1>

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DU THÉORÈME DE MAC-CULLAGH SUR LE TRIANGLE INSCRIT DANS L'ELLIPSE

Extension au cas de l'hyperbole et de la parabole (*)

(voir t IX, p. 296);

PAR M. MISTER,
Professeur à l'Athenée royal de Bruges,

ET M. NEUBERG,
Professeur à l'École Normale de Nivelles.

---

1. THÉORÈME. — *Un triangle étant inscrit dans une ellipse, le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal au produit des trois demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle, divisé par le produit des deux demi-axes.*

Ce théorème revient au suivant qui le rend applicable aux trois courbes : *Le carré du rayon du cercle circonscrit est égal au produit des trois cordes passant par le foyer parallèlement aux côtés du triangle, divisé par quatre fois le paramètre de la conique.*

(*) Le theoreme restait à demontrer pour l'hyperbole (voir *Nouvelles Annales*, t IX, p. 298), et n'a été démontré géometriquement que pour l'ellipse.

Rapportons l'ellipse à ses axes principaux, son équation sera

$$(1)\qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

La circonférence circonscrite au triangle ABC rencontre l'ellipse en un quatrième point D, et si l'on appelle

$$y = mx + p,$$
$$y = m'x + p'$$

les équations de deux sécantes communes au cercle et à l'ellipse, et

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 - R^2 = 0$$

l'équation de la circonférence, celle de l'ellipse pourra se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(y - mx - p)(y - m'x - p') \\ &\quad + \lambda[(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 - R^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation devant être identiquement la même que la première, on devra avoir

$$(3)\qquad m + m' = 0,$$

$$(4)\qquad p + p' = -2\lambda\beta,$$

$$(5)\qquad mp' + m'p = 2\lambda\alpha,$$

$$(6) \text{ et } (7)\qquad \frac{1+\lambda}{a^2} = \frac{\lambda}{b^2} = -\frac{pp' + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)}{a^2 b^2}.$$

De la première de ces équations on tire $m' = -m$, ce qui indique que, dans un même système, les sécantes communes sont également inclinées sur le grand axe, mais en sens contraires.

De l'avant-dernière on tire

$$\lambda = \frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

ensuite les équations (4) et (5) donnent

$$p' + p = -2\lambda\beta,$$

$$p' - p = \frac{2\lambda\alpha}{m};$$

élevons au carré et retranchons, nous aurons

$$pp' = \lambda^2\left(\beta^2 - \frac{\alpha^2}{m^2}\right).$$

Remplaçons ces valeurs dans l'équation (7) mise sous la forme

$$b^2(1+\lambda) + pp' + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0;$$

elle deviendra, réductions faites,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & m^2a^2b^2(1+m^2)(a^2-b^2) \\ & \quad + (a^2m^2+b^2)[(1+m^2)(a^2\beta^2m^2 - b^2\alpha^2) \\ & \qquad\qquad - R^2m^2](a^2-b^2)] = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation développée est du sixième degré en m; elle donne par conséquent les inclinaisons des six sécantes communes. Ces six valeurs de m sont égales deux à deux et de signes contraires; les carrés des valeurs de m, dans chaque système de sécantes communes, sont donc égaux, et comme les trois côtés du triangle ABC font partie de chaque système, il en résulte que l'équation précédente, étant résolue par rapport à m^2, donnera les carrés des inclinaisons des trois côtés du triangle ABC.

Cela posé, menons un diamètre parallèle à la droite $y = mx + p$; la longueur d de ce diamètre sera donnée par

$$d^2 = \frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2},$$

d'où l'on tire

$$m^2 = \frac{b^2(a^2 - d^2)}{a^2(d^2 - b^2)},$$

et par suite

$$1 + m^2 = \frac{d^2(a^2 - b^2)}{a^2(d^2 - b^2)}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (8), le facteur commun $(a^2m^2 + b^2)$ pourra se supprimer et l'on aura, pour déterminer d, l'équation

$$d^6 - [a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - R^2)]d^4$$
$$- [a^2b^2 + a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - R^2(a^2 - b^2)]d^2 - R^2a^2b^2 = 0.$$

Cette équation est du troisième degré en d^2; par conséquent, en appelant d^2, d'^2, d''^2 les trois racines, on aura

$$d^2d'^2d''^2 = R^2a^2b^2,$$

d'où

$$R = \frac{dd'd''}{ab}.$$

2. Énoncé de la seconde manière, le théorème peut se démontrer avec la même facilité. Si par le foyer d'une ellipse nous menons une corde MFN parallèle à la droite $y = mx + p$, en appelant α l'angle qu'elle fait avec le grand axe, on sait que l'on a

$$\text{FN} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \text{FM} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha},$$

d'où l'on tire, en additionnant et appelant l la longueur de la corde,

$$l = \frac{\frac{2b^2}{a}}{1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha}.$$

Or, la corde étant parallèle à la droite $y = mx + p$, on a $\tang \alpha = m$, et par suite

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+m^2}.$$

Substituons dans la valeur de l et observons que $c^2 = a^2 - b^2$, il vient

$$l = \frac{2ab^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2}.$$

On pourrait tirer de là la valeur de m^2 et la porter dans l'équation (8); on aurait une équation du troisième degré en l qui donnerait la valeur du produit des trois racines; mais si l'on rapproche cette valeur de l de celle de d^2 qui est

$$d^2 = \frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2},$$

on voit que l'on a

$$\frac{d^2}{l} = \frac{a}{2}, \quad \text{d'où} \quad d^2 = \frac{a}{2}\cdot l.$$

La même relation subsiste entre les autres valeurs, et en substituant dans

$$d^2d'^2d''^2 = R^2a^2b^2,$$

il vient

$$ll'l''\cdot\frac{a^3}{8} = R^2a^2b^2,$$

d'où l'on tire

$$R^2 = \frac{ll'l''}{8\dfrac{b^2}{a}}.$$

Et comme $\dfrac{2b^2}{a}$ représente le paramètre $2P$ de l'ellipse, on peut écrire

$$R^2 = \frac{ll'l''}{8P}.$$

3. La solution que nous venons de donner s'étend d'elle-même au cas de l'hyperbole. Il suffit pour cela d'identifier l'équation (2) avec celle de l'hyperbole,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les calculs se traitent de la même manière, ils ne diffèrent des précédents que par le changement de b^2 en $-b^2$, et l'on parvient facilement à l'équation

$$\begin{aligned} &- m^2a^2b^2(1+m^2)(a^2+b^2) \\ &\quad + (a^2m^2-b^2)[(1+m^2)(a^2\beta^2m^2+b^2\alpha^2) - R^2m^2(a^2+b^2)] = 0; \end{aligned}$$

mais comme on a aussi

$$d^2 = -\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2-b^2},$$

on aura, comme pour l'ellipse, pour déterminer d^2, l'équation du troisième degré

$$(9)\left\{\begin{aligned} &d^6 - [\alpha^2 - b^2 - (\alpha^2+\beta^2-R^2)]d^4 \\ &\qquad - [-a^2b^2 + a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 - R^2(a^2+b^2)]d^2 + R^2a^2b^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, ici deux cas sont possibles : si le triangle inscrit dans l'hyperbole a ses trois sommets sur la même branche de courbe, les diamètres menés parallèlement aux côtés du triangle ABC, ne rencontrant pas la courbe, seront imaginaires, et les trois racines de l'équation précédente seront négatives; dans le cas contraire, deux diamètres seront réels et le troisième imaginaire, deux des racines seront positives et la troisième négative. En représentant les trois racines, dans le premier cas, par $-d^2$, $-d'^2$, $-d''^2$, et dans le second par $-d^2$, d'^2, d''^2, on aura chaque fois

$$-d^2d'^2d''^2 = -R^2a^2b^2, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{dd'd''}{ab}.$$

La formule est donc la même; seulement, dans le cas de l'hyperbole, les trois diamètres seront imaginaires, ou bien deux seront réels et le troisième imaginaire.

4. La seconde forme donnée à l'énoncé dans le cas de l'hyperbole a l'avantage de faire disparaître toute trace d'imaginaire, car les cordes menées par le foyer parallèlement aux trois côtés du triangle seront toujours réelles. Pour avoir leurs longueurs, rappelons-nous qu'un rayon vecteur est donné par l'une ou l'autre des deux formules

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{-\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\alpha},$$

selon que son extrémité M est située sur l'une ou l'autre branche de courbe.

Lorsque le triangle inscrit a ses sommets sur une même branche de courbe, les cordes menées par le foyer parallèlement aux trois côtés ne coupent, non plus, qu'une seule branche, et l'on fera exclusivement usage de la première formule

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha}.$$

On aura donc, comme dans le cas de l'ellipse, pour les deux parties FM, FN d'une même corde MFN de longueur l,

$$\mathrm{FN} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{FM} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\alpha},$$

et, en additionnant,

$$\text{FN} + \text{FM} \quad \text{ou} \quad l = \frac{\dfrac{2b^2}{a}}{1 - \dfrac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha}.$$

Comme $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+m^2}$ et $c^2 = a^2 + b^2$, il vient, pour la valeur de l,

$$l = \frac{2ab^2(1+m^2)}{a^2m^2 - b^4}.$$

En la comparant avec la valeur de d^2 qui est

$$d^2 = -\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2 - b^2},$$

on trouve

$$\frac{d^2}{l} = -\frac{a}{2}, \quad \text{d'où} \quad d^2 = -\frac{a}{2}\cdot l.$$

On aurait de même $d'^2 = -\dfrac{a}{2}l'$, $d''^2 = -\dfrac{a}{2}l''$ pour les deux autres cordes, et comme, dans l'équation (9), le produit des trois racines est négatif et égal à $-\text{R}^2a^2b^2$, en remplaçant dans le produit les trois racines par les trois valeurs que nous venons de trouver, il viendra

$$-\frac{a^3}{8}ll'l'' = -\text{R}^2a^2b^2,$$

d'où

$$\text{R}^2 = \frac{ll'l''}{8\dfrac{b^2}{a}} = \frac{ll'l''}{8\text{P}},$$

$\dfrac{b^2}{a}$ représentant encore la moitié du paramètre.

Lorsque deux des sommets du triangle se trouvent sur l'une des branches et le troisième sur l'autre, deux des cordes couperont les deux branches et la troisième n'en coupera qu'une. Pour celle-ci on aura, comme précédemment,

$$d^2 = -\frac{a}{2}l.$$

Pour chacune des deux autres, on remarquera que sa longueur est égale à une différence de deux rayons vecteurs dont le premier est donné par

$$\text{FM} = \frac{-\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{c}{a}\cos\alpha - 1},$$

et le second par

$$\text{FN} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha}.$$

On aura donc

$$l' = \text{FM} - \text{FN} = \frac{\frac{2b^2}{a}}{\frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha - 1}$$

ou

$$l' = \frac{-2ab^2(1 + m^2)}{a^2m^2 - b^2},$$

et par suite

$$\frac{d'^2}{l'} = \frac{a}{2} \quad \text{ou} \quad d'^2 = \frac{a}{2}\cdot l'.$$

On aurait de la même manière

$$d''^2 = \frac{a}{2}l''.$$

Substituant ces valeurs dans le produit des trois racines de l'équation (9), on obtient, comme dans le premier cas,

$$R^2 = \frac{ll'l''}{8P}.$$

5. La parabole étant une variété de l'ellipse ou de l'hyperbole, on peut en conclure que le théorème précédent subsiste dans le cas de la parabole. On peut cependant le démontrer directement de la manière suivante.

En identifiant l'équation (2) avec celle de la parabole

$$y^2 = 2Px;$$

on obtient cette suite d'égalités

$$\begin{aligned}
m + m' &= 0, \quad \text{d'où} \quad m' = -m,\\
mm' + \lambda &= 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = m^2,\\
p + p' + 2\lambda\beta &= 0,\\
pm' + p'm - 2\lambda\alpha &= -2P(1+\lambda),\\
pp' + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Éliminons m', λ, p, p' entre ces équations, il vient, pour l'équation en m,

$$(10) \quad m^4\beta^2(1+m^2) - m^4R^2 - P^2(1+m^2)^2 + 2P\alpha m^2(1+m^2) = 0.$$

Or, si par le foyer de la parabole on mène une corde parallèle à la droite $y = mx + p$, la longueur de cette corde sera donnée par la somme des deux rayons vecteurs

$$FM = \frac{P}{1-\cos\alpha} \quad \text{et} \quad FN = \frac{P}{1+\cos\alpha}.$$

On a ainsi

$$l = FM + FN = \frac{2P}{\sin^2\alpha};$$

or, $\sin^2\alpha = \frac{m^2}{1+m^2}$: donc la longueur de la corde sera donnée par

$$l = \frac{2P(1 + m^2)}{m^2},$$

d'où l'on tire

$$m^2 = \frac{2P}{l - 2P} \quad \text{et} \quad 1 + m^2 = \frac{l}{l - 2P}.$$

Substituons dans l'équation (10) et ordonnons par rapport à l, il vient

$$l^3 - (2P + 4\alpha) l^2 + 4(R^2 - \beta^2 + 2P\alpha) l - 8R^2P = 0.$$

Cette équation est du troisième degré en l; elle donne les longueurs des trois cordes menées par le foyer parallèlement aux trois côtés du triangle; par conséquent, en appelant l, l', l'' les trois racines, nous aurons

$$ll'l'' = 8R^2P,$$

d'où

$$R^2 = \frac{ll'l''}{8P}.$$

6. Observons, pour terminer, que les trois équations en m que nous venons de trouver ne changeant pas quand on y remplace m par $-m$, il en résulte que le théorème subsiste encore lorsque les angles d'inclinaison des trois cordes sur le grand axe sont remplacés par les angles supplémentaires.