Nouvelles annales de mathématiques

DIEU

Note sur l'équation du troisième degré de la question du pendule conique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 456-458

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__456_0>

NOTE SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ DE LA QUESTION DU PENDULE CONIQUE (*);

PAR M. DIEU,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

M. Sturm a très-heureusement perfectionné la théorie du pendule conique par une ingénieuse disposition de l'équation du troisième degré qui s'y rencontre. Il lui a donné, comme on sait, la forme

$$(l^2 - z^2)(z - z_0 + h) - (l^2 - z_0^2)h\cos^2\varepsilon = 0,$$

d'après laquelle on voit qu'elle a toujours trois racines réelles :

1° Une racine négative inférieure à $-l$ et même à $-(h - z_0)$ pour le cas de $h - z_0 > l$, car $-l$ et $z_0 - h$ donnent tous deux le résultat négatif $-(l^2 - z_0^2)h\cos^2\varepsilon$;

2° Deux racines de signe ambigu dont l'une entre $-l$ ou $-(h - z_0)$ et z_0, et l'autre entre z_0 et l, car z_0 donne le résultat positif $(l^2 - z_0^2)h\sin^2\varepsilon$, et l donne le même résultat négatif que $-l$.

Quelque chose reste, je crois, à désirer dans la discussion de ces deux dernières racines, dont il est nécessaire de fixer les limites d'une manière plus précise pour exprimer le temps en fonction elliptique, comme M. Sturm l'a fait. a désignant la plus grande des deux et b la plus petite, il faut que l'expression

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{l^2 + 2ab + l^2}}}$$

(*) *Cours de Mécanique* par M. STURM, publié par M. PROUHET, 44e leçon.

[formule (2), page 182] reste réelle quand φ varie de o à $\frac{\pi}{2}$. Or, cela exige effectivement que la quantité $\frac{a^2 - b^2}{l^2 + 2ab + a^2}$ se trouve comprise entre o et 1. M. Sturm, dont la pénétration était si grande, avait sans doute vu que ces conditions sont toujours remplies; mais il ne l'a pas établi dans son cours écrit. C'est ce que je vais faire dans cette Note.

La plus grande a des trois racines de l'équation est positive quand z_0 est positif, puisqu'elle se trouve entre z_0 et l. Elle est encore positive lorsque z_0 est négatif, car on a

$$l^2(h \sin^2\varepsilon - z_0) + z_0^2 h \cos^2\varepsilon$$

pour $z = 0$, c'est-à-dire un résultat positif, en sorte qu'elle se trouve entre o et l dont le résultat de substitution est négatif.

Quand la racine b est positive, on a $a^2 - b^2 > 0$. Pour savoir si cette inégalité subsiste lorsque b est négative, ou, en d'autres termes, si $-b$ est inférieur à a, je substitue $-a$, ce qui donne

$$a^3 + (z_0 - h)a^2 - l^2 a - l^2(z_0 - h) - (l^2 - z_0^2) h \cos^2\varepsilon.$$

Il n'est pas possible de discerner immédiatement le signe de ce résultat; mais la remarque que

$$- a^3 + (z_0 - h)a^2 + l^2 a - l^2(z_0 - h) - (l^2 - z_0^2) h \cos^2\varepsilon$$

est nul, puisque a est par hypothèse une racine de l'équation, permet de réduire à

$$-2a(l^2 - a^2)$$

l'expression précédente, et l'on voit enfin que $-a$ donne un résultat négatif. On a donc dans tous les cas

$$a^2 - b^2 > 0,$$

et de plus

$$l^2 - b^2 > a^2 - b^2.$$

Joignant à ces deux inégalités l'inégalité évidente

$$a^2 + 2ab + b^2 > 0,$$

on obtient

$$l^2 + 2ab + a^2 > a^2 - b^2 > 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$