J.-CH. DUPAIN

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 454-455

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__454_0>

QUESTION D'EXAMEN;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Trouver les racines réelles de l'équation $a^x + b^x = c^x$ *dans laquelle* a, b, c *sont des nombres positifs.*

Je remarque d'abord que si les trois nombres a, b, c sont plus petits que l'unité, $+\infty$ est une solution de l'équation; de même $-\infty$ serait une solution si les trois nombres étaient plus grands que l'unité.

Lorsque $a = b$, l'équation peut se résoudre immédiatement; en effet,

$$2a^x = c^x, \quad x = \frac{\log 2}{\log c - \log a}.$$

Lorsque a diffère de b, on peut supposer $a > b$, ce qui donne lieu à trois cas.

Premier cas : $c > a > b$. — Je divise les deux membres de l'équation par c^x, en tenant compte, s'il y a lieu, de la solution infinie donnée par $c^x = 0$, et j'ai

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 1;$$

$\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ sont plus petits que l'unité; le premier membre est une fonction constamment décroissante, égale à 2 quand x est nul, et nulle quand x est infini; il y a donc une seule racine qui est positive. On la sépare facilement en remarquant que

$$2\left(\frac{a}{c}\right)^x > 1, \quad 2\left(\frac{b}{c}\right)^x < 1,$$

d'où

$$\frac{\log 2}{\log c - \log b} < x < \frac{\log 2}{\log c - \log a}.$$

Deuxième cas : $c < b < a$. — On reconnaît par le même moyen l'existence d'une seule racine qui est négative.

Troisième cas : $a > c > b$. — Il n'y a pas de racine réelle, car pour toute valeur positive de x

$$a^x > c^x, \quad \text{et à fortiori} \quad a^x + b^x > c^x;$$

pour toute valeur négative de x,

$$b^x > c^x, \quad \text{et à fortiori} \quad a^x + b^x > c^x.$$

Remarque. — Cette question a été posée le 30 mars 1865, à Poitiers, aux candidats pour le baccalauréat ès sciences : il serait superflu de s'enquérir si elle a été résolue.

Remarque. — Le nombre des racines imaginaires sera en général infini et leur recherche compliquée; nous nous contenterons d'un exemple très-simple. Soit

$$a = me^2, \quad b = me, \quad c = m;$$

e étant la base des logarithmes népériens,

$$e^{2x} + e^x = 1, \quad e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x = l.\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

On voit que x a une infinité de valeurs imaginaires et une seule valeur réelle.