NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Deux théorèmes sur la décomposition de certaines expressions en deux carrés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 451-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__451_1>

DEUX THÉORÈMES SUR LA DÉCOMPOSITION DE CERTAINES EXPRESSIONS EN DEUX CARRÉS;

PAR M. S. REALIS.

Les deux théorèmes dont il s'agit peuvent être énoncés au moyen d'une formule unique, qui est la suivante :

$$
\begin{aligned}
1 \pm \sum \alpha_1^2 + \sum (\alpha_1\alpha_2)^2 \pm \sum (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 + \sum (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2 \pm \ldots \\
= \left[1 \mp \sum (\alpha_1\alpha_2) + \sum (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) \mp \sum (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_6) \pm \ldots\right]^2 \\
\pm \left[\sum \alpha_1 \mp \sum (\alpha_1\alpha_2\alpha_3) + \sum (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_5) \mp \sum (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_7) + \ldots\right]^2.
\end{aligned}
$$

$\sum \alpha_1$ et $\sum (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)$ désignent la somme de n quantités données $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, et la somme des produits de ces quantités k à k; $\sum \alpha_1^2$ et $\sum (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)^2$ désignent de même la somme des n carrés $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \ldots, \alpha_n^2$, et celle des produits de ces carrés k à k; les signes supérieurs et inférieurs se correspondent partout entre eux; la succession des termes $\sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)^2$, et celle des termes $\sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)$ ne vont pas au delà de

$$\sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^2 = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^2$$

et de

$$\sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,$$

respectivement.

On a ainsi, par le premier théorème (signes supérieurs),

$$1 + (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2 = (1 - \alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta)^2,$$

$$\begin{aligned} &1 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) + \alpha^2\beta^2\gamma^2 \\ &\quad = [1 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)]^2 + [(\alpha + \beta + \gamma) - \alpha\beta\gamma]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + (\alpha^2\beta^2 + \ldots + \gamma^2\delta^2) + (\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \ldots\, \beta^2\gamma^2\delta^2) \\ &\quad + \alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2 = [1 - (\alpha\beta + \ldots + \gamma\delta) + \alpha\beta\gamma\delta]^2 \\ &\quad + [(\alpha + \ldots + \delta) - (\alpha\beta\gamma + \ldots + \beta\gamma\delta)]^2, \end{aligned}$$

. . . .

L'expression constituant le premier membre de chacune de ces égalités peut donc être transformée en une somme de deux carrés au moyen de formules directes. Et comme il est permis de changer, dans le second membre, les signes des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, à volonté, la décomposition dont il s'agit pourra généralement être faite de plusieurs manières différentes. Cette remarque est commune aux deux théorèmes compris dans la formule générale ci-dessus.

Par le deuxième théorème (signes inférieurs) on a

$$1-(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2=(1+\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta)^2,$$

$$1-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)-\alpha^2\beta^2\gamma^2$$
$$=[1+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)]^2-[(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta\gamma]^2,$$

$$1-(\alpha^2+\ldots+\delta^2)+(\alpha^2\beta^2+\ldots+\gamma^2\delta^2)-(\alpha^2\beta^2\gamma^2+\ldots+\beta^2\gamma^2\delta^2)$$
$$+\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2=[1+(\alpha\beta+\ldots+\gamma\delta)+\alpha\beta\gamma\delta]^2$$
$$-[(\alpha+\ldots+\delta)+(\alpha\beta\gamma+\ldots+\beta\gamma\delta)]^2;$$

....

par où l'on voit que la somme algébrique exprimée par le premier membre de ces formules peut toujours être changée en une différence de deux carrés que l'on sait construire directement.

Remarque. — On énonce aussi les propositions qui précèdent en disant que *si* $f(z)=z^n-az^{n-1}+\ldots=0$ *est l'équation aux carrés des racines de l'équation*

$$x^n-A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}-A_3x^{n-3}+\ldots=0,$$

on aura

$$(-1)^n f(-1)$$
$$=(1-A_2+A_4-A_6+\ldots)^2+(A_1-A_3+A_5-\ldots)^2,$$

et

$$f(1)=(1+A_2+A_4+A_6+\ldots)^2-(A_1+A_3+A_5+\ldots)^2.$$

Ainsi, une équation $f(z)=0$, à coefficients rationnels, étant donnée, si les nombres $(-1)^n f(-1)$ et $f(1)$ ne sont pas réductibles à la fois, le premier à une somme de deux carrés, et le deuxième à une différence de deux carrés, par cela seul on sera en droit de conclure que toutes les racines de cette équation ne sont pas des carrés.