NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BARBIER

Démonstration géométrique des formules de trigonométrie sphérique qui donnent $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}, \operatorname{tang}\frac{A}{2}$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 421-423

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__421_0>

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

des formules de Trigonométrie sphérique qui donnent

$$\sin\frac{A}{2},\quad \cos\frac{A}{2},\quad \tang\frac{A}{2};$$

Par M. E. BARBIER.

1. Prenons pour plan de la figure le plan du côté AB du triangle sphérique (*); par le sommet C opposé à ce côté menons deux plans, l'un perpendiculaire au rayon OA, l'autre perpendiculaire au rayon OB; ces plans ont pour traces DE et FG; ils se coupent suivant une droite CP perpendiculaire au plan de la figure.

2. Dans la section faite dans la sphère par le plan perpendiculaire à OA, l'arc CE est égal à l'angle A du triangle sphérique; par suite, dans le demi-cercle DCE, on a

$$\frac{CE}{DE} = \sin\frac{A}{2} \quad \text{et} \quad \frac{PE}{CE} = \sin\frac{A}{2}.$$

Multipliant membre à membre ces deux égalités et simplifiant, on en déduit

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{PE}{DE};$$

on obtiendrait de même

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{PD}{DE}$$

et aussi

$$\tang^2\frac{A}{2} = \frac{PE}{PD}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

3. On a :

$$FB = BG = a, \quad DA = AE = b, \quad AB = c;$$
$$\text{arc } DE = DA + AE = 2b,$$
$$\text{arc } FG = FB + BG = 2a,$$
$$\begin{aligned}
\text{arc } DF &= DA + AB - BF = b + c - a = 2(p - a),\\
\text{arc } FE &= FB - BA + AE = a - c + b = 2(p - c),\\
\text{arc } EG &= -EA + AB + BG = -b + c + a = 2(p - b),\\
\text{arc } DG &= DA + AB + BC = b + c + a = 2p.
\end{aligned}$$

4. L'angle des diagonales DE et FG du quadrilatère inscrit DFEG est égal à l'angle des droites OA et OB qui leur sont respectivement perpendiculaires; or, cet angle est celui qu'on désigne par c.

5. On a :

$$\frac{\text{aire FPE}}{\text{PE}} = \frac{\text{aire FPD}}{\text{PD}} = \frac{\text{aire FDE}}{\text{DE}}:$$

de même,

$$\frac{\text{aire GPE}}{\text{PE}} = \frac{\text{aire GPD}}{\text{PD}} = \frac{\text{aire GDE}}{\text{DE}}.$$

En ajoutant les rapports qui ont les mêmes dénominateurs, on obtient

$$\frac{\text{aire FEG}}{\text{PE}} = \frac{\text{aire FDG}}{\text{PD}} = \frac{\text{aire DFEG}}{\text{DE}}.$$

De là,

$$\frac{\text{PE}}{\text{DE}} \quad \text{ou} \quad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{\text{aire FEG}}{\text{aire DFEG}},$$
$$\frac{\text{PD}}{\text{DE}} \quad \text{ou} \quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{\text{aire FDG}}{\text{aire DFEG}},$$
$$\frac{\text{PE}}{\text{PD}} \quad \text{ou} \quad \text{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{\text{aire FEG}}{\text{aire FDG}}.$$

6. L'aire d'un triangle est égale au produit de ses trois

côtés divisé par quatre fois le rayon du cercle circonscrit.

De ce théorème on déduit les égalités suivantes :

$$\text{aire FEG} = \frac{2\sin a . 2\sin(p-c) . 2\sin(p-b)}{4},$$

$$\text{aire FDG} = \frac{2\sin a . 2\sin(p-a) . 2\sin p}{4},$$

$$\text{aire DFEG} = \frac{2\sin a . 2\sin b . 2\sin c}{2}.$$

On obtient cette dernière égalité en exprimant que l'aire du quadrilatère DFEG est la moitié du résultat qu'on obtient en multipliant le produit de ses diagonales par le sinus de l'angle qu'elles forment.

On écrit facilement ces trois formules, si l'on se reporte aux égalités écrites dans le n° 3 et si l'on se rappelle la formule

$$\text{corde}\, 2x = 2\sin x.$$

7. Les valeurs des aires FEG, FDG, DFEG étant portées dans les formules qui donnent

$$\sin^2\frac{A}{2},\quad \cos^2\frac{A}{2},\quad \text{tang}^2\frac{A}{2},$$

on obtient en simplifiant

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c},$$

$$\text{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}.$$

Ce sont les formules que je me proposais de démontrer d'une manière géométrique.