NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. PAINVIN

Théorie des surfaces polaires d'un plan

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 413-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__413_1>

THÉORIE DES SURFACES POLAIRES D'UN PLAN

(voir p 337);

PAR M. L. PAINVIN.

---

9. *Étant donnée l'*ÉQUATION PONCTUELLE *d'une surface, trouver son* ÉQUATION TANGENTIELLE.

Soit l'équation d'un plan,

$$Xx + Yy + Zz + Tt = 0,$$

X, Y, Z, T étant les paramètres de ce plan; cherchons les conditions pour qu'il soit tangent à la surface. Si x_0, y_0, z_0, t_0 sont les coordonnées du point de contact, on devra avoir, en identifiant avec l'équation du plan tangent,

$$(1^\circ) \qquad U(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0,$$

$$(2^\circ) \qquad \frac{\left(\frac{dU}{dx}\right)_0}{X} = \frac{\left(\frac{dU}{dy}\right)_0}{Y} = \frac{\left(\frac{dU}{dz}\right)_0}{Z} = \frac{\left(\frac{dU}{dt}\right)_0}{T};$$

en éliminant x_0, y_0, z_0, t_0 entre les quatre équations homogènes (1°) et (2°), on arrivera à une relation de la forme

$$(3^\circ) \qquad F(X, Y, Z, T) = 0;$$

c'est la condition pour que le plan soit tangent. Or, nous pouvons (9) regarder X, Y, Z, T comme les coordonnées de ce plan; l'équation (3°) est donc l'équation tangentielle de la surface.

Les équations (1°) et (2°) entraînent comme conséquence la relation

$$Xx_0 + Yy_0 + Zz_0 + Tt_0 = 0;$$

on peut, par conséquent, substituer au système des équations (1°) et (2°) le système suivant :

$$\text{(I)} \qquad -\frac{T}{X} = \frac{x_0}{t_0} + \frac{Y}{X}\frac{y_0}{t_0} + \frac{Z}{X}\frac{z_0}{t_0};$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{Y}{Z}\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 - \left(\frac{dU}{dy}\right)_0 = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{Z}{X}\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 - \left(\frac{dU}{dz}\right)_0 = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad U(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0.$$

Supposons qu'on se donne les rapports $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$, et que m soit le degré de l'équation de la surface; les équations (II), (III), (IV) ont $m(m-1)^2$ solutions communes $\left(\frac{x_0}{t_0}, \frac{y_0}{t_0}, \frac{z_0}{t_0}\right)$, et l'équation (I) donne $m(m-1)^2$ valeurs correspondantes pour $\frac{T}{X}$. Or, l'équation (3°) est une conséquence de ces quatre équations; donc, à un même système de valeurs données pour $\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)$, correspondent, dans cette équation, $m(m-1)^2$ valeurs pour $\frac{T}{X}$; *l'équation tangentielle* (3°) *est donc, en général, du degré* $m(m-1)^2$.

10. *Étant donnée l'*ÉQUATION TANGENTIELLE *d'une surface, trouver son* ÉQUATION PONCTUELLE.

Soit l'équation d'un point

$$xX + yY + zZ + tT = 0,$$

x, y, z, t étant les paramètres de ce point; cherchons les conditions pour qu'il soit sur la surface. Si X_0, Y_0, Z_0, T_0 sont les coordonnées d'un plan tangent, on devra avoir, en identifiant avec l'équation du point de contact,

$$(1^\circ) \qquad U(X_0, Y_0, Z_0, T_0) = 0;$$

$$(2^\circ) \qquad \frac{\left(\frac{dU}{dX}\right)_0}{x} = \frac{\left(\frac{dU}{dY}\right)_0}{y} = \frac{\left(\frac{dU}{dZ}\right)_0}{z} = \frac{\left(\frac{dU}{dT}\right)_0}{t}.$$

En éliminant X_0, Y_0, Z_0, T_0 entre les équations (1°) et (2°), on arrivera à une relation de la forme

$$(3^\circ) \qquad F(x, y, z, t) = 0;$$

c'est la condition pour que le point soit sur la surface. Mais on peut (14) regarder x, y, z, t comme les coordonnées du point; l'équation (3°) sera donc l'équation ponctuelle de la surface.

En raisonnant comme dans le cas précédent, on verra que *si n est le degré de l'équation tangentielle, $n(n-1)^2$ sera, en général, le degré de l'équation ponctuelle.*

11. *Surfaces développables.* — Une surface développable est représentée par deux équations tangentielles telles que

$$(1^\circ) \qquad U = 0, \quad V = 0,$$

et cette surface est circonscrite aux deux surfaces U et V. Ainsi, dans le système des équations tangentielles, les surfaces développables sont corrélatives des courbes de l'espace dans le système des équations ponctuelles.

Les coordonnées d'un plan P, passant par l'intersection D des deux plans fixes P_0 et P_1, sont

$$X = \frac{\lambda X_1 + \mu X_0}{\rho}, \quad Y = \frac{\lambda Y_1 + \mu Y_0}{\rho},$$
$$Z = \frac{\lambda Z_1 + \mu Z_1}{\rho}, \quad T = \frac{\lambda T_1 + \mu T_0}{\rho};$$

pour que ce plan P soit tangent à la surface développable, il faut qu'il soit tangent à la fois aux surfaces U et V. Or, si l'on substitue les valeurs précédentes de X, Y, Z, T dans les équations (1°), on aura deux équations homogènes en $\frac{\lambda}{\mu}$, lesquelles n'auront pas, en général, de solution commune. Donc, par une droite arbitraire, on ne peut pas mener de plan tangent à une surface développable.

Donnons-nous un point fixe

$$(2^\circ) \qquad AX + BY + CZ + DT = 0;$$

les solutions communes aux équations (1°) et (2°) donneront des plans tangents à la surface développable et passant par le point fixe. Or, si n et n_1 sont les classes respectives des surfaces U et V, le nombre des solutions communes sera $1 . n . n_1$.

Nous appellerons *classe d'une surface développable le nombre des plans tangents qu'on peut mener à cette surface par un point quelconque. Nous voyons, en outre, que si n et n_1 sont les classes des surfaces qui déterminent la surface développable, la classe de cette dernière sera égale à nn_1.*

Cette proposition complète l'idée de la corrélation des surfaces développables et des courbes gauches.

12. *Signification de l'équation homogène*

$$\varphi(X, Y, Z) = 0.$$

Soit X_0, Y_0, Z_0 une solution, différente de zéro, de l'équation

$$(1^\circ) \qquad \varphi(X, Y, Z) = 0;$$

l'équation (1°), ne renfermant pas T, sera vérifiée, quels que soient λ et μ, par

$$(2^\circ) \quad X = \frac{\lambda X_0}{\rho}, \quad Y = \frac{\lambda Y_0}{\rho}, \quad Z = \frac{\lambda Z_0}{\rho}, \quad T = \frac{\lambda T_0 + \mu T_1}{\rho};$$

T_0 et T_1 étant les valeurs de T fournies par la relation (10), lorsqu'on y remplace successivement (X, Y, Z) par (X_0, Y_0, Z_0) et (0, 0, 0); les valeurs (2°) déterminent donc un plan tangent à la surface (1°). Mais ce plan passe (11) par l'intersection L des deux plans (X_0, Y_0, Z_0, T_0) et $(0, 0, 0, T_1)$ ou ABC; et, puisque λ et μ sont quelconques, il y a, par suite, une infinité de plans tangents passant par la droite L; de plus le point de contact est fixe. Or, comme les droites L sont dans le plan fixe ABC, la surface se réduit donc à une courbe plane située dans le plan ABC. Ainsi, l'équation

$$\varphi(X, Y, Z) = 0$$

représente une courbe plane située dans le plan ABC; X, Y, Z peuvent être regardées comme les coordonnées d'une tangente quelconque à cette courbe.

13. Il n'est pas inutile d'indiquer la corrélation des figures représentées par une équation, suivant que cette dernière est interprétée dans le système ponctuel ou dans le système tangentiel.

Une *équation ponctuelle* représentant :

1° Une surface réglée gauche,

2° Une surface développable,

3° Un cône,
4° Une courbe gauche, $\Big\}$ deux équations;
5° Une courbe plane,

donne, si on la considère *comme équation tangentielle:*

Une surface réglée gauche,
Une courbe gauche,
Une courbe plane,
Une surface développable, $\Big\}$ deux équations.
Un cône,

Il est facile de se rendre compte de cette corrélation. Car exprimer, dans le système des équations ponctuelles, qu'il y a une infinité de points situés sur la surface et sur une même ligne droite, revient à exprimer, dans le système des équations tangentielles, qu'il y a une infinité de plans tangents passant par une même droite; cette droite est donc tout entière sur la surface. Or, dans le système ponctuel, il pourra arriver que le *plan tangent* aux divers points d'une même génératrice varie avec la position du point, si la surface est gauche; ou qu'il soit invariable, si la surface est développable. Alors (dans le système tangentiel), il arrivera, pour le premier cas, que le *point de contact* du plan tangent passant par la même génératrice varie avec la position du plan : la surface est alors gauche; pour le second cas, que le point de contact est invariable : la surface se réduit alors à une courbe gauche. Lorsque la surface est un cône (dans le système ponctuel), le *plan tangent* passe par un point fixe; dans le système tangentiel, le *point de contact* décrira un plan fixe, la surface se réduira donc alors à une courbe plane.

14. En terminant cette première Partie, je rappellerai la définition du centre harmonique d'un système de points; cette notion nous sera utile dans la seconde Partie.

I° « Soient n points M_i situés sur une même droite : on
» appelle *centre harmonique* du système par rapport à
» un point O pris sur cette même droite, un point M tel
» que

$$\frac{n}{OM} = \frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM_2} + \ldots + \frac{1}{OM_n}. »$$

II° « Soient un système de n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$
» situés dans un plan et une droite fixe L située dans le
» même plan. Joignons un point quelconque O de la
» droite L aux n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$; puis, coupons
» le faisceau $(OL ; OM_1, OM_2, \ldots, OM_n)$ par une
» transversale quelconque, et soient $(l ; m_1, m_2, \ldots, m_n)$
» les points d'intersection. Prenons le centre harmo-
» nique m, par rapport au point l, des points $m_1, m_2, \ldots,$
» m_n, et joignons-le au point O ; la droite Om passera
» toujours par un certain point fixe M, quelle que soit
» la transversale considérée, et quel que soit le point O
» pris sur la droite L. Nous donnerons, d'après M. Pon-
» celet, à ce point fixe M le nom de *centre harmonique*
» *du système plan* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *par rapport à la*
» *droite* L. »

III° La notion du centre harmonique peut encore se
généraliser comme il suit :

« Soient n points $M_i (x_i, y_i, z_i, t_i)$ disposés d'une ma-
» nière quelconque dans l'espace, et un plan fixe P.
» Joignons un point quelconque O du plan P aux n
» points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, et coupons le faisceau
» $(OM_1, OM_2, \ldots, OM_n)$ par un plan transversal quel-
» conque ; soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les intersections du
» faisceau, et L l'intersection du plan fixe P par le plan
» transversal. Concevons le centre harmonique m du
» système plan $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ par rapport à la droite L,
» et joignons Om ; la droite Om passera toujours par un

» certain point fixe M, quel que soit le plan transversal
» considéré et quel que soit le point O pris sur le plan P.
» J'appellerai ce point fixe M le *centre harmonique du*
» *système* M_1, M_2, ..., M_n *par rapport au plan* P. »

Si l'équation du plan fixe P est

$$(16) \qquad Ax + By + Cz + Dt = 0,$$

on constatera, par un calcul qui n'offre pas de grandes difficultés, la propriété énoncée du centre harmonique, et on verra, en outre, que ses coordonnées sont fournies par les formules

$$(17) \quad x = \frac{\sum \frac{x_i}{\Delta_i}}{\sum \frac{1}{\Delta_i}}, \quad y = \frac{\sum \frac{y_i}{\Delta_i}}{\sum \frac{1}{\Delta_i}}, \quad z = \frac{\sum \frac{z_i}{\Delta_i}}{\sum \frac{1}{\Delta_i}}, \quad t = \frac{\sum \frac{t_i}{\Delta_i}}{\sum \frac{1}{\Delta_i}},$$

formules dans lesquelles on a posé

$$(18) \qquad \Delta_i = Ax_i + By_i + Cz_i + Dt_i;$$

x_i, y_i, z_i, t_i sont les coordonnées du point M_i.

Les formules (17) nous montrent que le centre harmonique coïncide avec le centre de gravité du système, lorsqu'on attribue aux points M_1, M_2, ..., M_n les masses respectives $\frac{1}{\Delta_1}$, $\frac{1}{\Delta_2}$, ..., $\frac{1}{\Delta_n}$.

On voit aussi que, lorsque le plan P est le plan à l'infini, le centre harmonique coïncide avec le centre des moyennes distances.